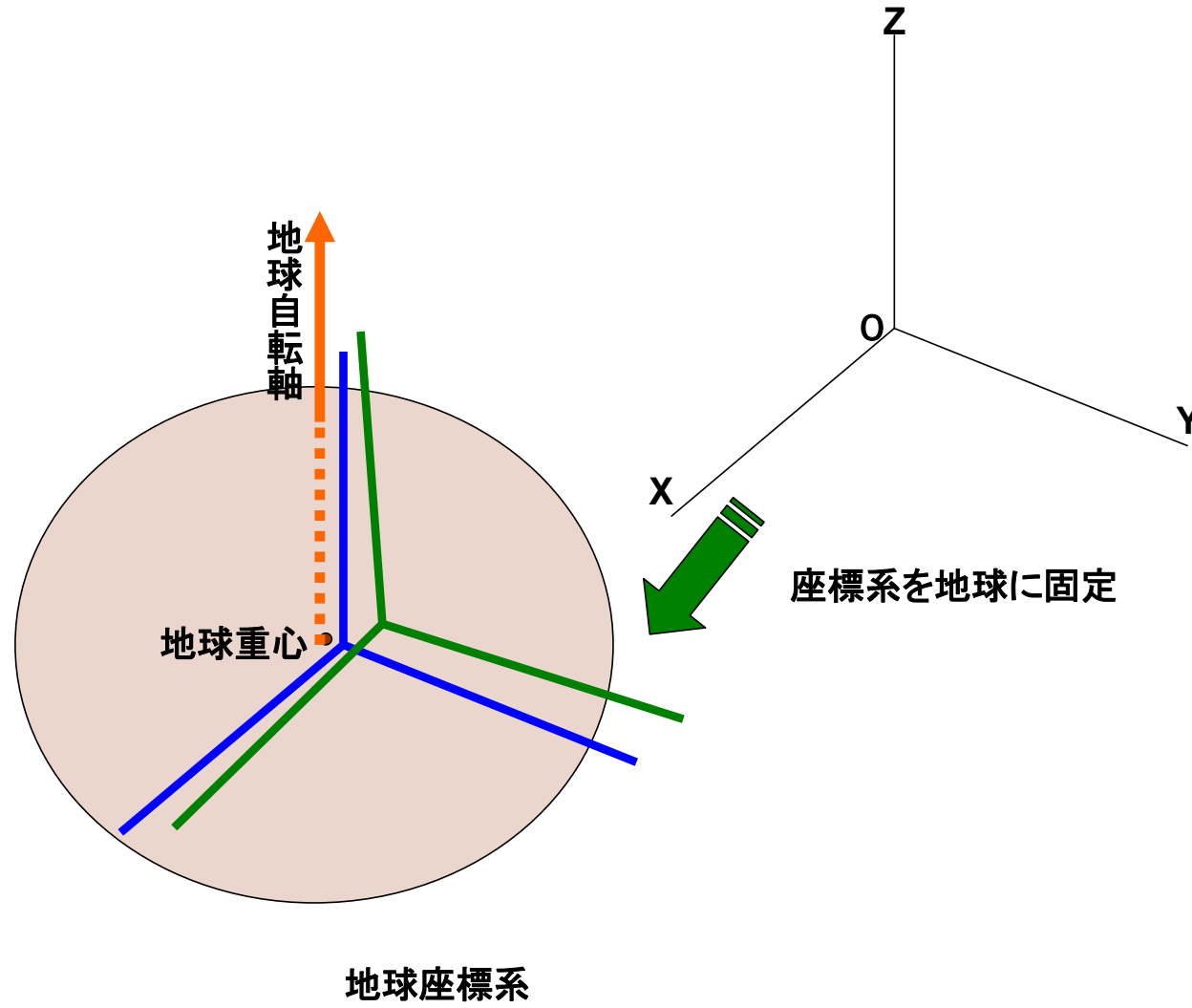


測地学入門

- 測地学とは地球の大きさや形を決定し、地球上での位置を明らかにするとともに、地球の重力場や地球自転運動の様子を明らかにする学問である。

地球座標系

- 地球に固定された座標系
- その中で現在使われ、最も信頼性の高い座標系が国際地球基準座標系 (ITRF) である。
- これは国際的な組織であるIERS (国際地球回転観測事業)が宇宙測地技術を使った観測を地球上多くの地点で行い、それら一定数の観測点を使って構築される。
- ITRFは、地球重心に原点を持ち、Z軸はCIOで定義された地球自転軸方向にとられる。
- ITRFは、定期的に更新され、更新に使われたデータを得た最後の年の末尾2桁がITRFの後に付け加えられる。日本が使っているのはITRF 9 4 である。



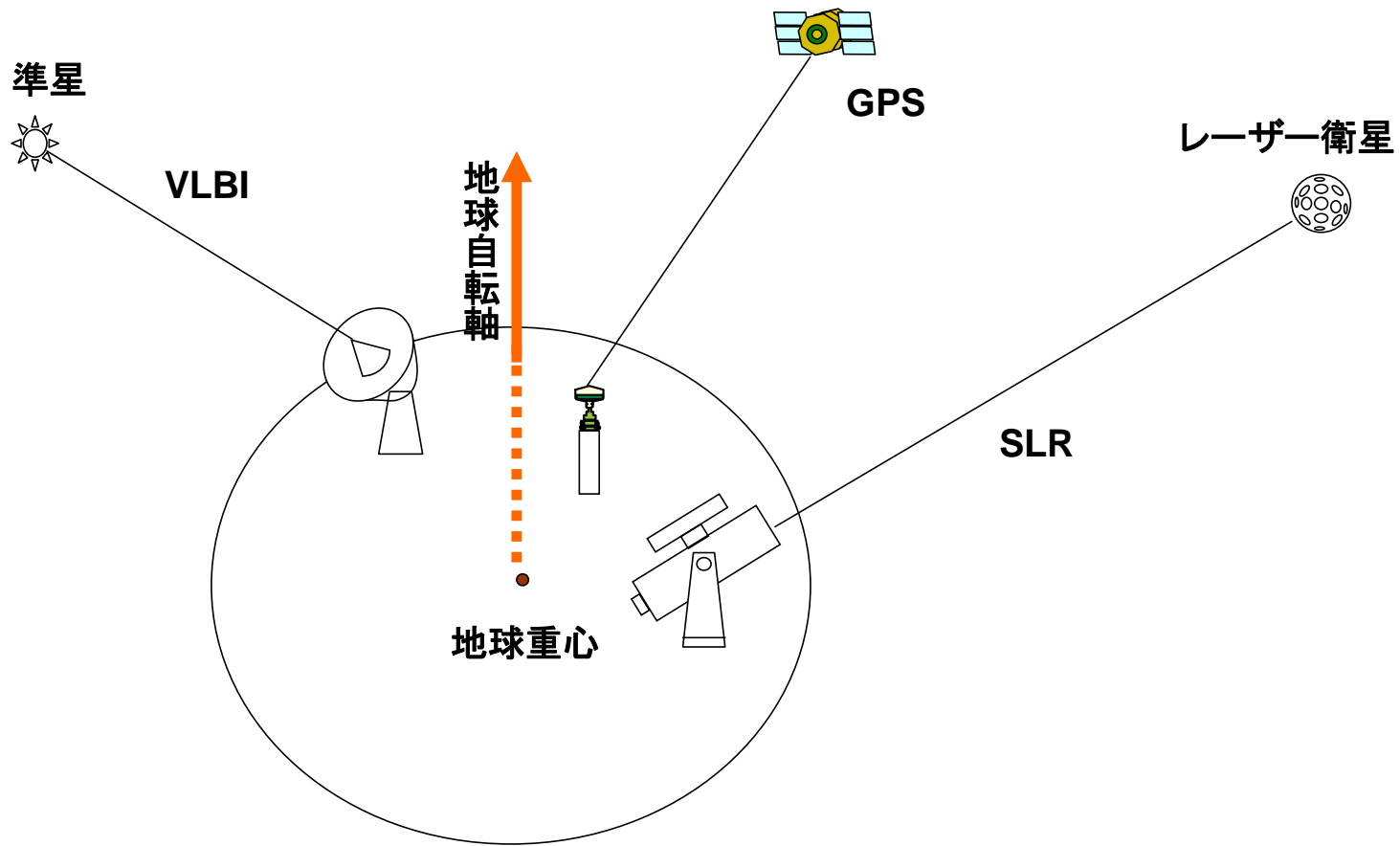
現代の地球座標系構築に欠かせない主な宇宙測地技術

VLBI(Very Long Baseline Interferometry)超長基線電波干渉計

SLR(Satellite Laser Ranging)衛星レーザー測距

GPS(Global Positioning System)全地球測位システム

クエーサー(準星)を基準にした地球自転軸方向は VLBI 観測で、また観測点に対する地球重心位置は GPS,SLR 観測でそれぞれ決められる。

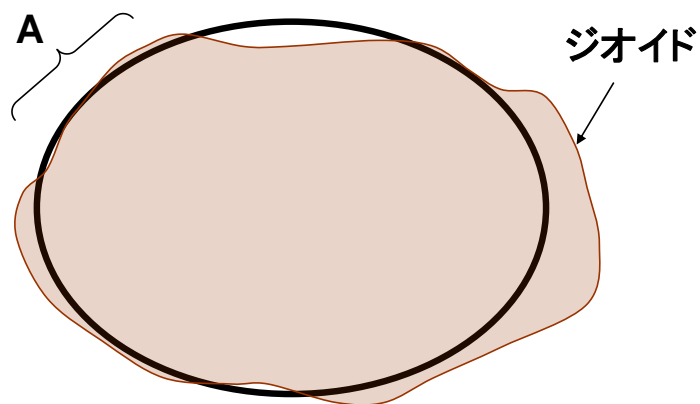


地球楕円体

- 地球座標系に地球の形に近い回転楕円体を付設することにより、位置を直交座標だけでなく、緯度、経度、高さといった測地座標でも表すことができるようになる。
- 現在学術的に最も地球の形に近い地球楕円体として認められているのは、GRS80楕円体である。

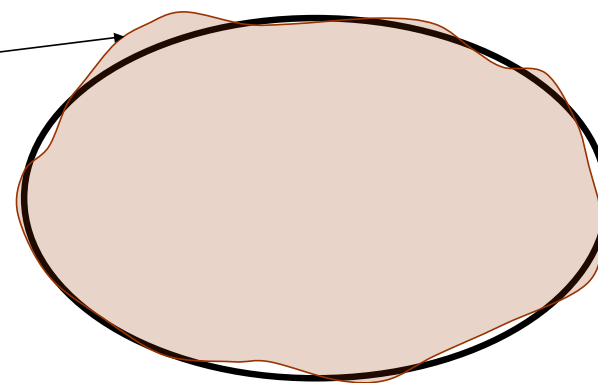
人工衛星以前の
局所的な地球楕円体: ベッセル等

(特定の地域(例えばA)の天文測地
データだけで楕円体を推定)



Aの地域では最もジオイドに近い
楕円体になっている。

最近のグローバルな
地球楕円体: GRS80等

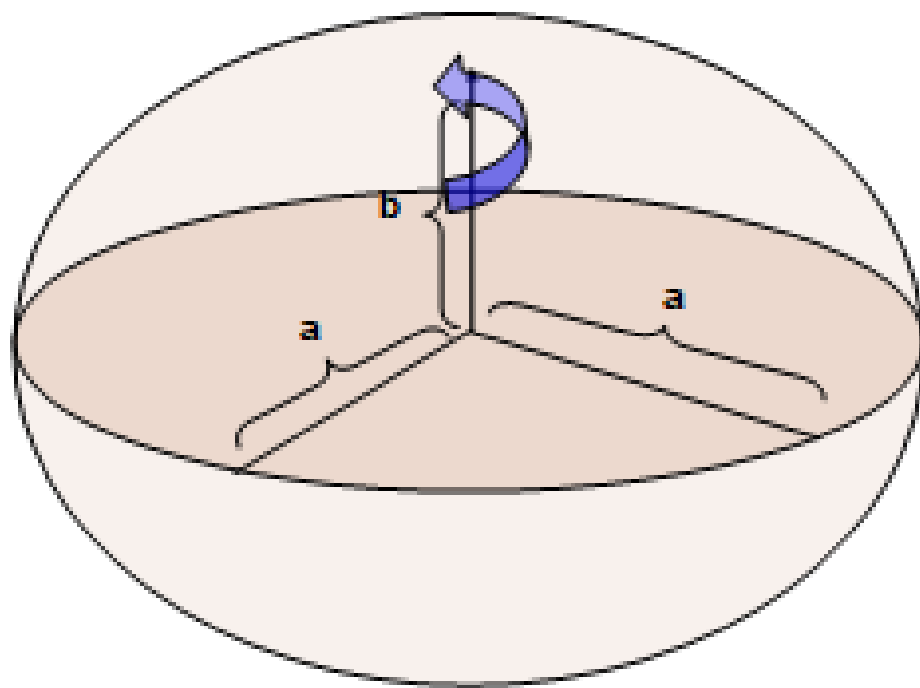


地球全体で最もジオイドに近い
楕円体になっている。

様々な地球楕円体

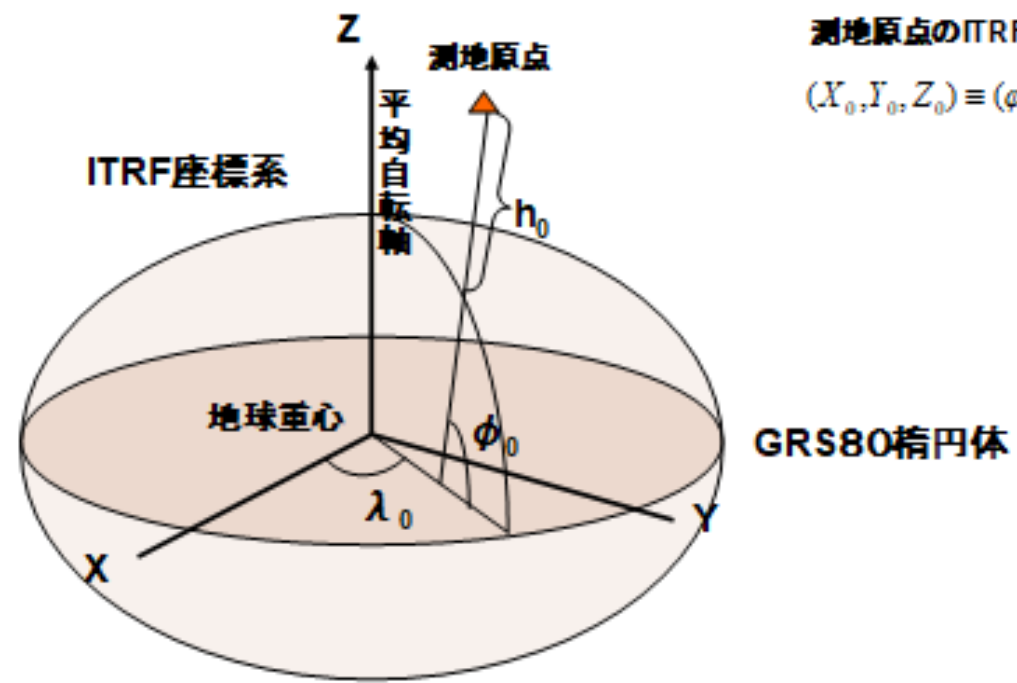
地球楕円体	長半径(m)	扁平率の逆数
エアリー (1830)	6 377 340.189	299.324 9646
ベッセル (1841)	6 377 397.155	299.152 8128
クラーク (1880)	6 378 245.0	298.3
ヘイフォード (1909)	6 378 388	297.0
クラソフスキー(1940)	6 378 388	297.0
GRS67 (1967)	6 378 160	298.257
GRS80 (1979)	6 378 137	298.257 222101
WGS84 (1986)	6 378 137	298.257 223563

回転楕円体



日本の測地 基準系

- 測地基準系は、地球座標系とそれに付設される準拠楕円体とで構成される。
- 日本の測地基準系は、ITRF94という地球座標系とGRS80という準拠楕円体を採用している。



測地原点のITRF座標

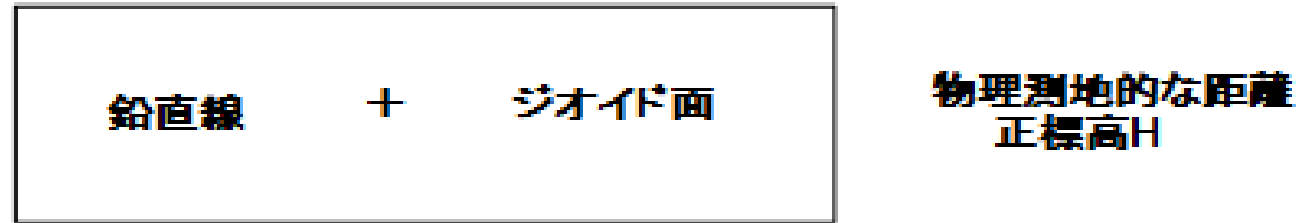
$$(X_0, Y_0, Z_0) \equiv (\varphi_0, \lambda_0, h_0)$$

日本の測地基準系

日本の測地基準系



高さの体系



高さはジオイド面から鉛直線に沿った距離として定義されるから
言わば鉛直線が(一次元の)座標系に相当する。

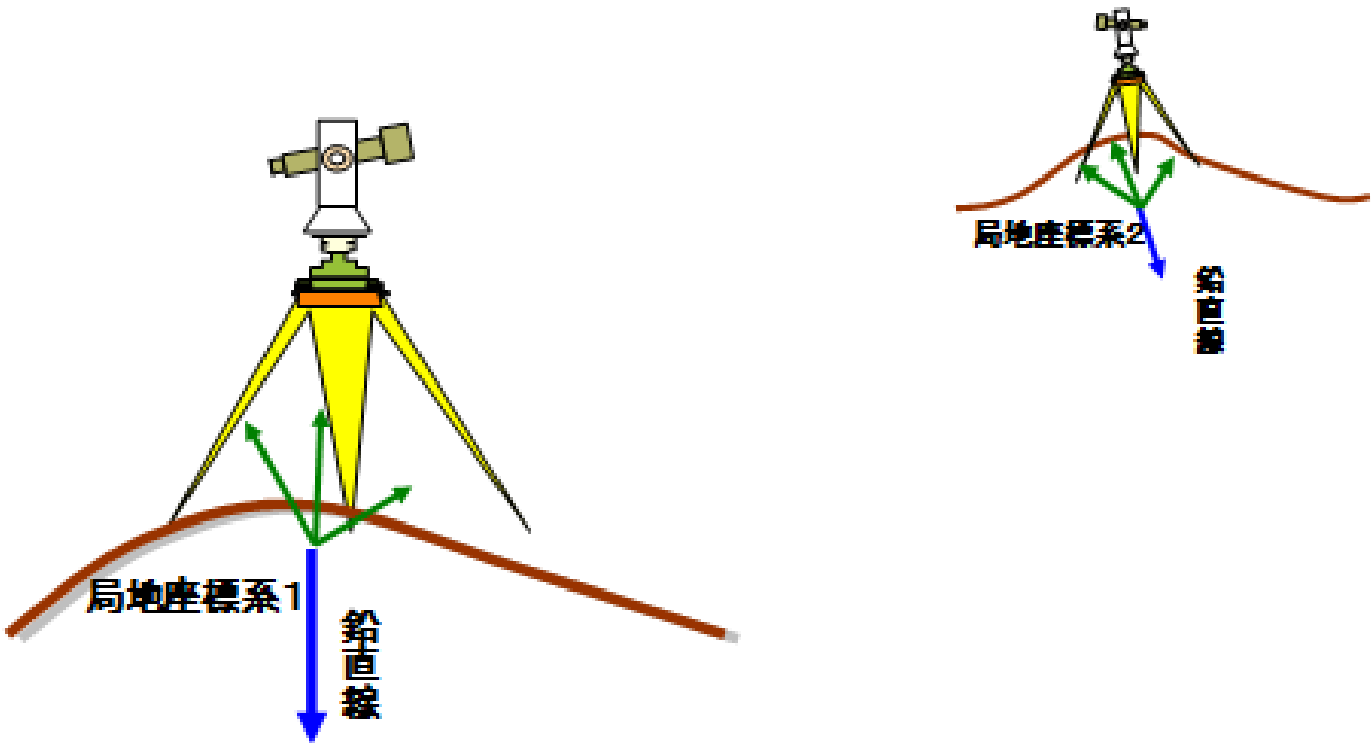
座標系

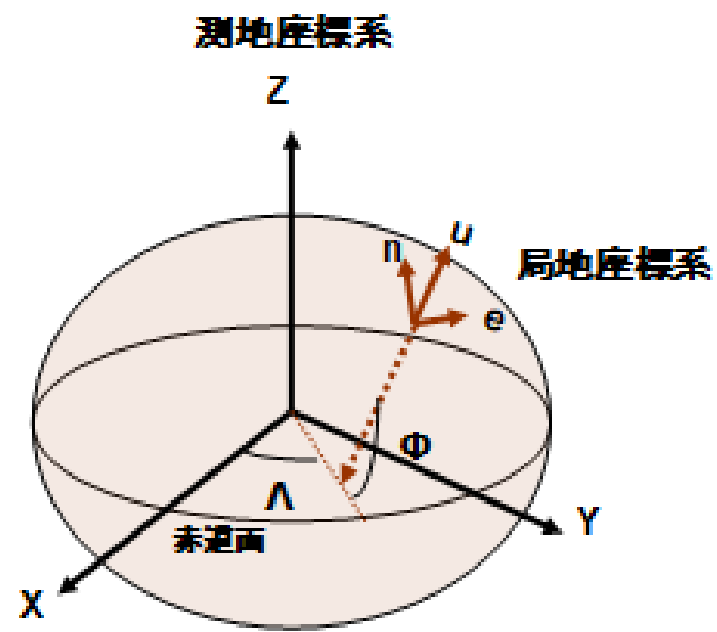
観測点における局地座標系

局地座標系

- われわれが地上で測量を行う場合、基準となる座標系は、観測点の鉛直線をZ軸、水平面をX,Y平面とするような局地座標系である。

観測点毎の局地座標系





天文經緯度 (Φ , Λ)

天球座標系

- 地球座標系は、地球に固定された座標系であるが、宇宙空間(恒星)に対して固定された座標系は天球座標系と呼ばれている。
- 恒星の観測や、人工衛星の観測をする場合には天球座標系が欠かせない。

天球座標系

- ↓ 歳差・章動の補正
- ↓ 地球と共に回転
- ↓ 極運動の補正

地球座標系

Z 軸の方向

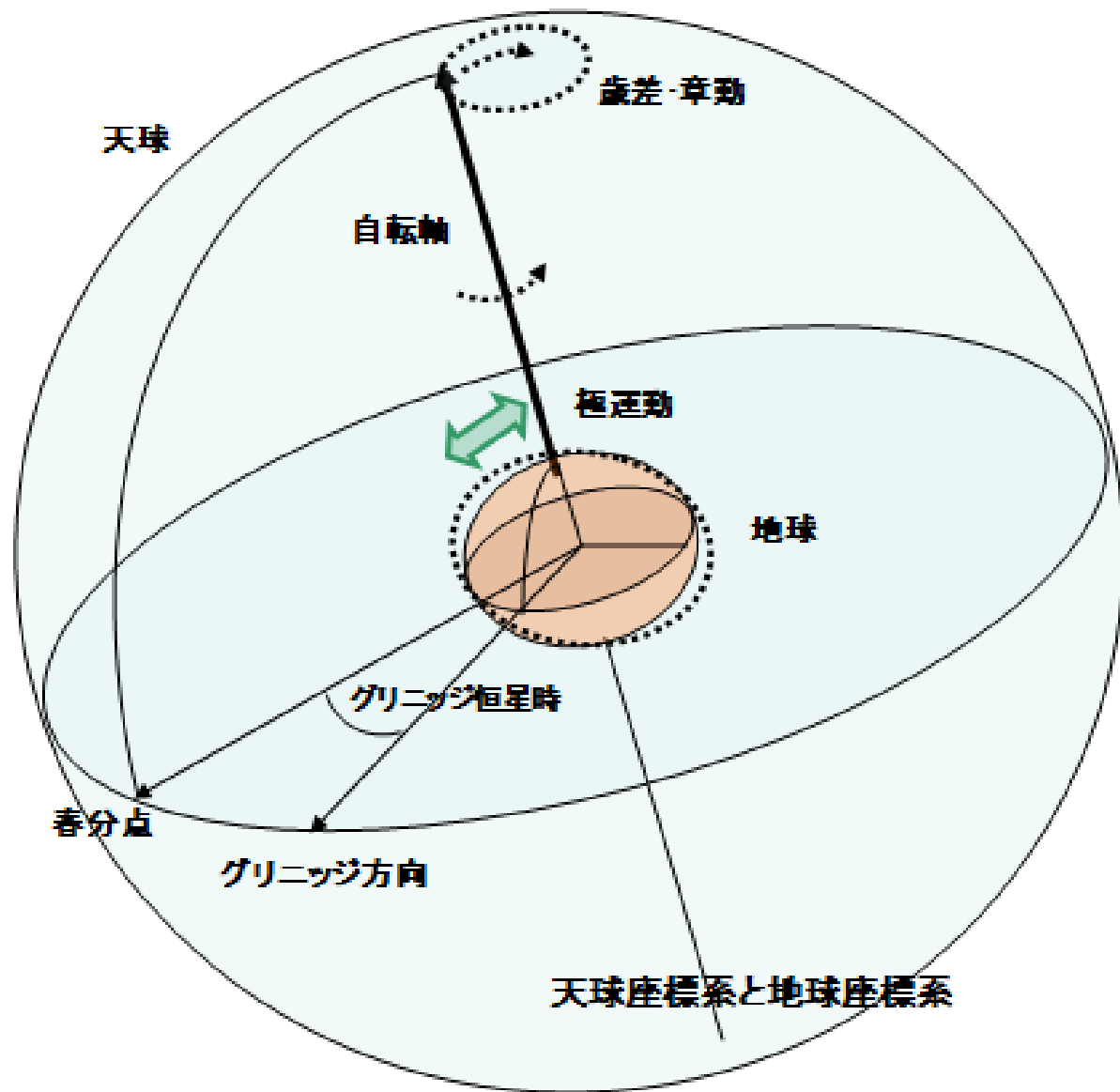
元期における自転軸方向

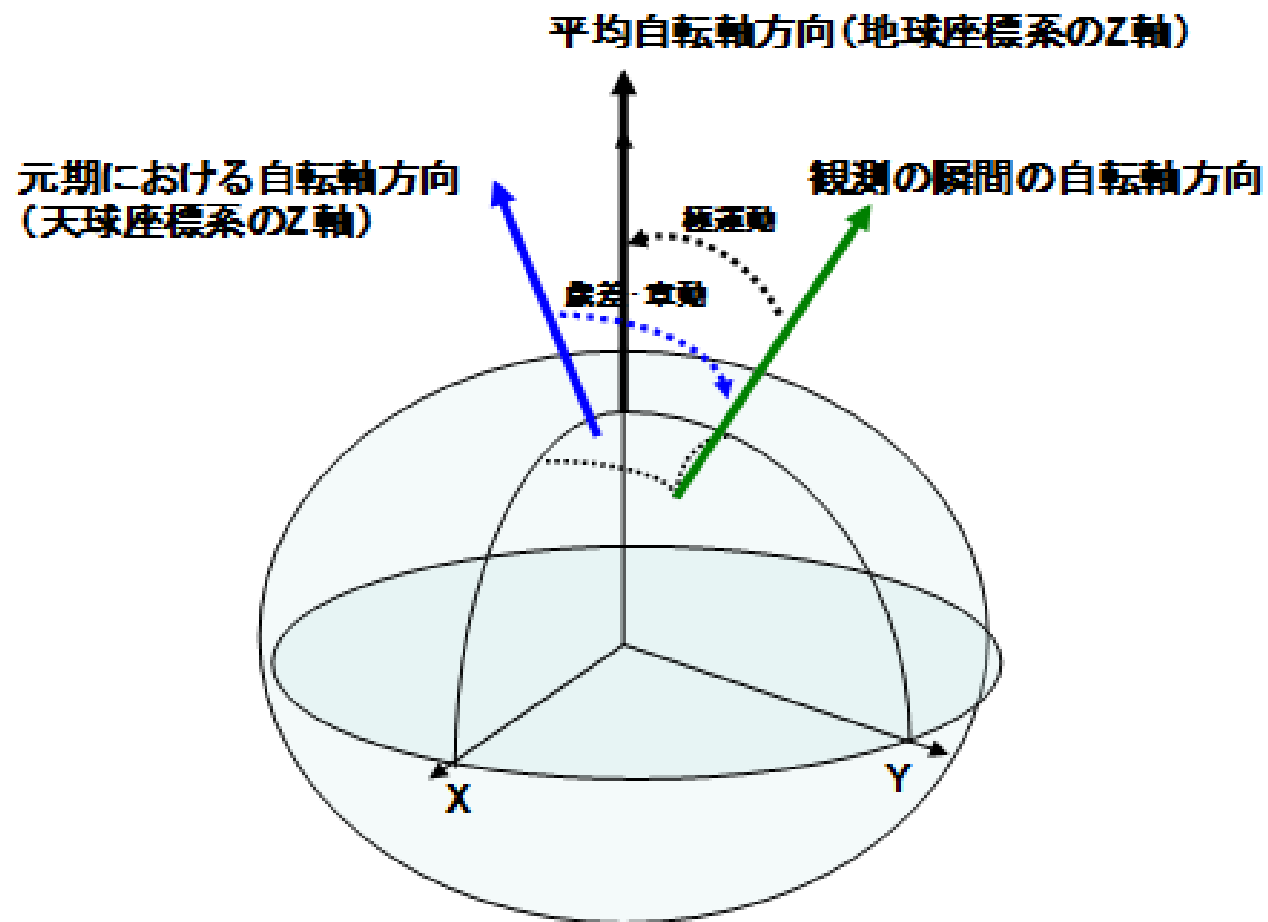
観測の瞬間の自転軸方向

観測の瞬間の自転軸方向

平均自転軸方向

平均自転軸方向



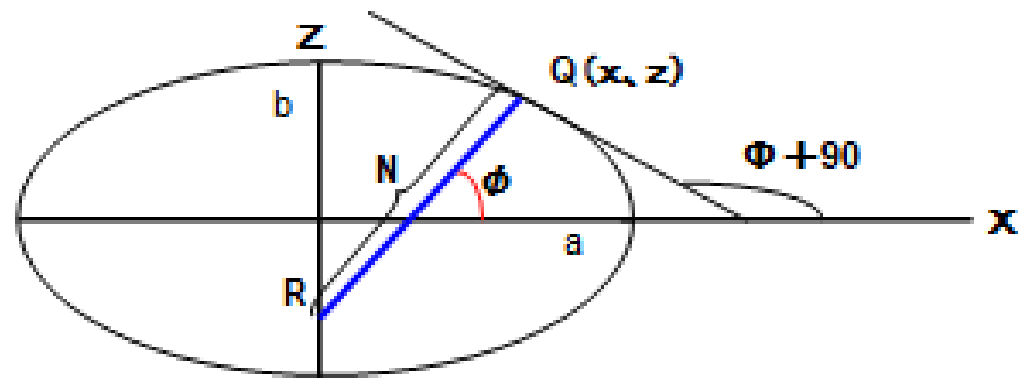


地球座標系で見た各自転軸の方向

座標の変換

- 楕円体座標 \Leftrightarrow 平面直角座標
- 測測地座標系の直交座標 \Leftrightarrow 楕円体座標
- 地座標相互の3次元変換

楕円の式 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$



三次元直交座標と楕円体座標の関係式は

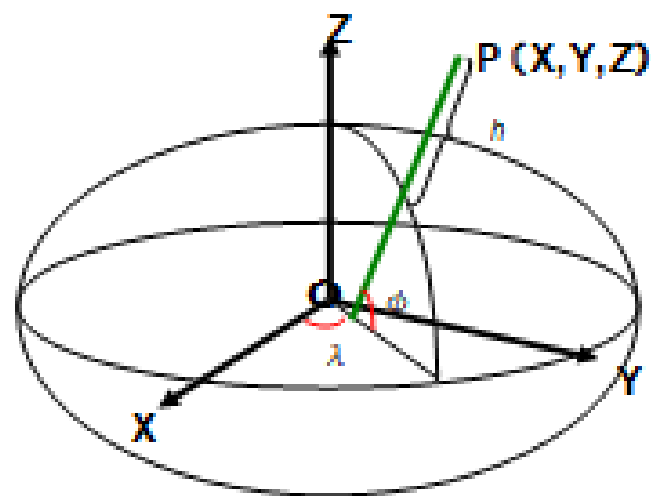
$$X = (N + h) \cos \varphi \cos \lambda$$

$$Y = (N + h) \cos \varphi \sin \lambda$$

$$Z = \left(\frac{b^2}{a^2} N + h \right) \sin \varphi$$

$$N = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}}$$

	X		φ	
直交座標	Y	\longleftrightarrow	λ	橢圓體座標
	Z		h	



楕円体座標から平面直角座標への変換

コーシー・リーマンの式の導出

$dq = \frac{Md\varphi}{N \cos \varphi}$ (q は異性緯度と呼ばれている) で定義される q を使って m^2 を変形する。

$$m^2 = \frac{dS^2}{ds^2} = \frac{dx^2 + dy^2}{(Md\varphi)^2 + (N \cos \varphi d\lambda)^2}$$

$$\text{分子: } dx^2 + dy^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial q} dq + \frac{\partial x}{\partial \lambda} d\lambda \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q} dq + \frac{\partial y}{\partial \lambda} d\lambda \right)^2 = Adq^2 + 2Bdq d\lambda + Cd\lambda^2$$

$$\text{ただし } A = \left(\frac{\partial x}{\partial q} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q} \right)^2, B = \frac{\partial x}{\partial q} \frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{\partial y}{\partial q} \frac{\partial y}{\partial \lambda}, C = \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda} \right)^2$$

$$\text{分母: } (Md\varphi)^2 + (N \cos \varphi d\lambda)^2 = N^2 \cos^2 \varphi (dq^2 + d\lambda^2)$$

ここで ds の方位角を α とすると、 $ds \cos \alpha = Md\varphi, ds \sin \alpha = N \cos \varphi d\lambda$ (楕円体の幾何学II参照) から、 $N \cos \varphi d\lambda = M \tan \alpha d\varphi$ である。これを分母、分子に代入

$$\text{して } d\lambda \text{ を消去し、整理すると } m^2 = \frac{A \cos^2 \alpha + 2B \sin \alpha \cos \alpha + C \sin^2 \alpha}{N^2 \cos^2 \varphi} \text{ となる。}$$

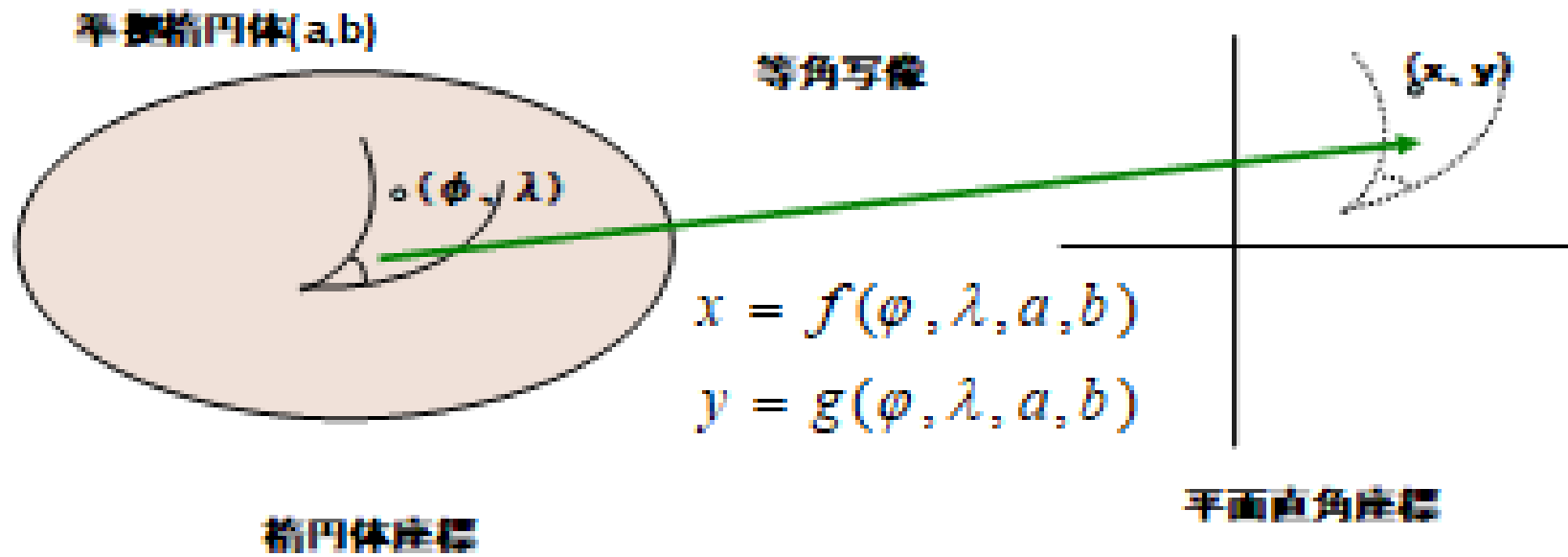
等角投影の条件は m が方位角 α に無関係であることである。このためには

$A = C, B = 0$ が成り立てばよい。すなわち

$$\frac{\partial x}{\partial q} \frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{\partial y}{\partial q} \frac{\partial y}{\partial \lambda} = 0, \left(\frac{\partial x}{\partial q} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q} \right)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda} \right)^2 \text{ である。}$$

コーシー・リーマンの式 $\frac{\partial x}{\partial \lambda} = \frac{\partial y}{\partial q}, \frac{\partial x}{\partial q} = -\frac{\partial y}{\partial \lambda}$ が、この式を満足していることは

明らかであろう。



測地測量では、ガウス・クリューゲル投影による変換が用いられる。

ガウスクリューゲル投影

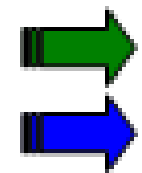
$$y = F(\varphi) + \frac{Nl^2}{2} \sin \varphi \cos \varphi + \frac{Nl^4}{24} \sin \varphi \cos^3 \varphi (5 - t^2 + 9\eta^2 + 4\eta^4) \\ + \frac{Nl^6}{720} \sin \varphi \cos^5 \varphi (61 - 58t^2 + t^4 + 270\eta^2 - 330t^2\eta^2) \\ + \frac{Nl^8}{40320} \sin \varphi \cos^7 \varphi (1385 - 3111t^2 + 543t^4 - t^6) + \dots$$

$$x = Nl \cos \varphi + \frac{Nl^3}{6} \cos^3 \varphi (1 - t^2 + \eta^2) \\ + \frac{Nl^5}{120} \cos^5 \varphi (5 - 18t^2 + t^4 + 14\eta^2 - 58t^2\eta^2) \\ + \frac{Nl^7}{5040} \cos^7 \varphi (61 - 479t^2 + 179t^4 - t^6) + \dots$$

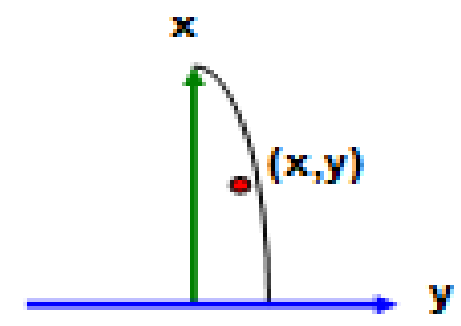
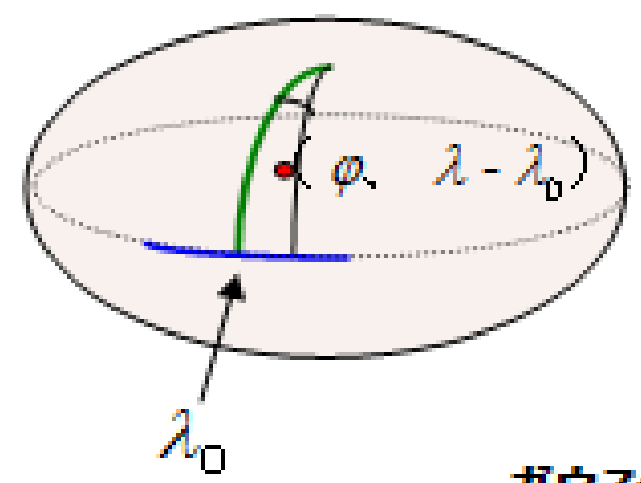
ここで $F(\varphi)$. . . 子午線弧長
 N . . . 卯酉線曲率半径
 $\eta^2 = e'^2 \cos^2 \varphi$. . . 補助量
 $e'^2 = (a^2 - b^2)/b^2$. . . 第2離心率
 $t = \tan \varphi$. . . 補助量
 $\ell = \lambda - \lambda_0$. . . 経度差
 λ_0 . . . 中央子午線の経度

(楕円体の幾何学 I 参照)

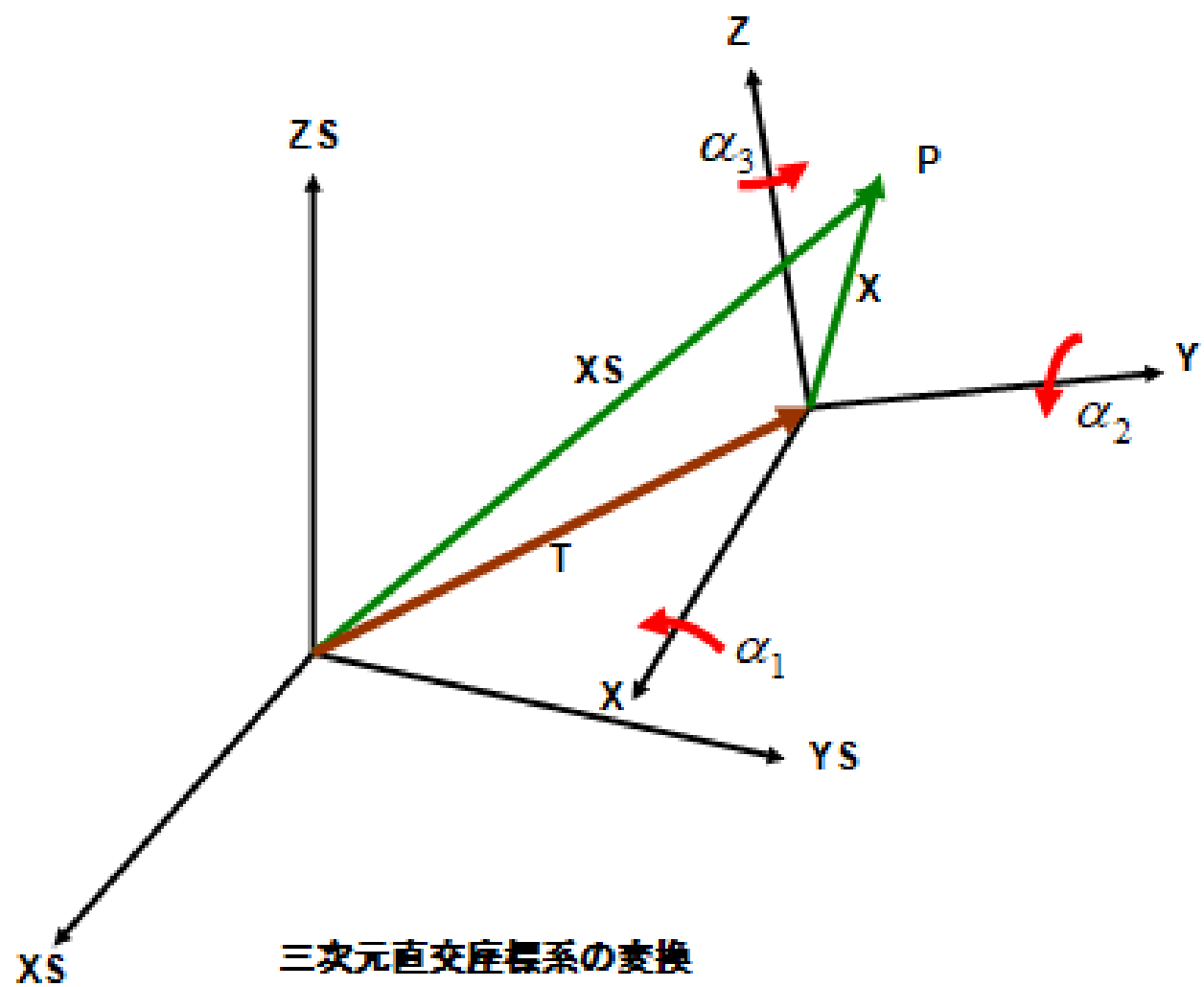
中央子午線
赤道



x軸
y軸



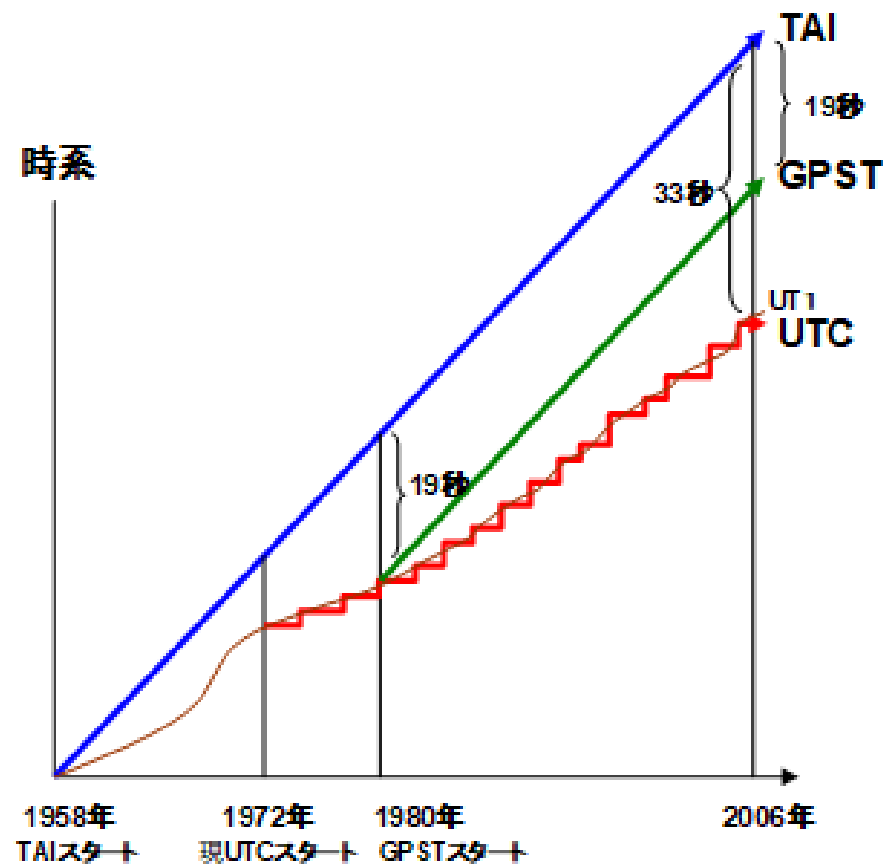
ガウスクリュージェル投影



三次元直交座標系の変換

時間のシステム

- 位置の決定において時間の果たす役割は大きい。GPSやVLBIといった宇宙測地技術では、位置の測定は時間の測定であるといってもよい。
- 地球の自転に基づいた時間のシステムは世界時(UT)と呼ばれている。
- しかし地球の自転速度が一定ではないことが明らかになり、現在時系の単位としては原子時が、暦としては協定世界時(UTC)が使われている。

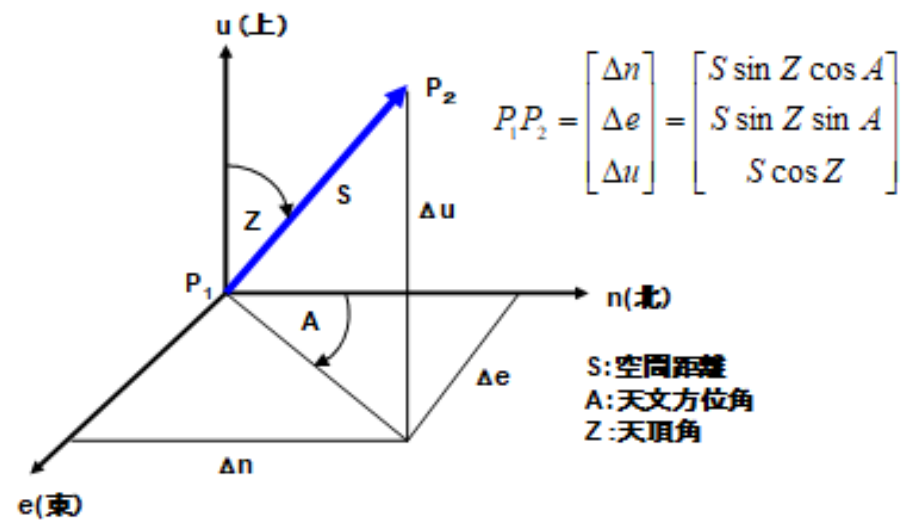


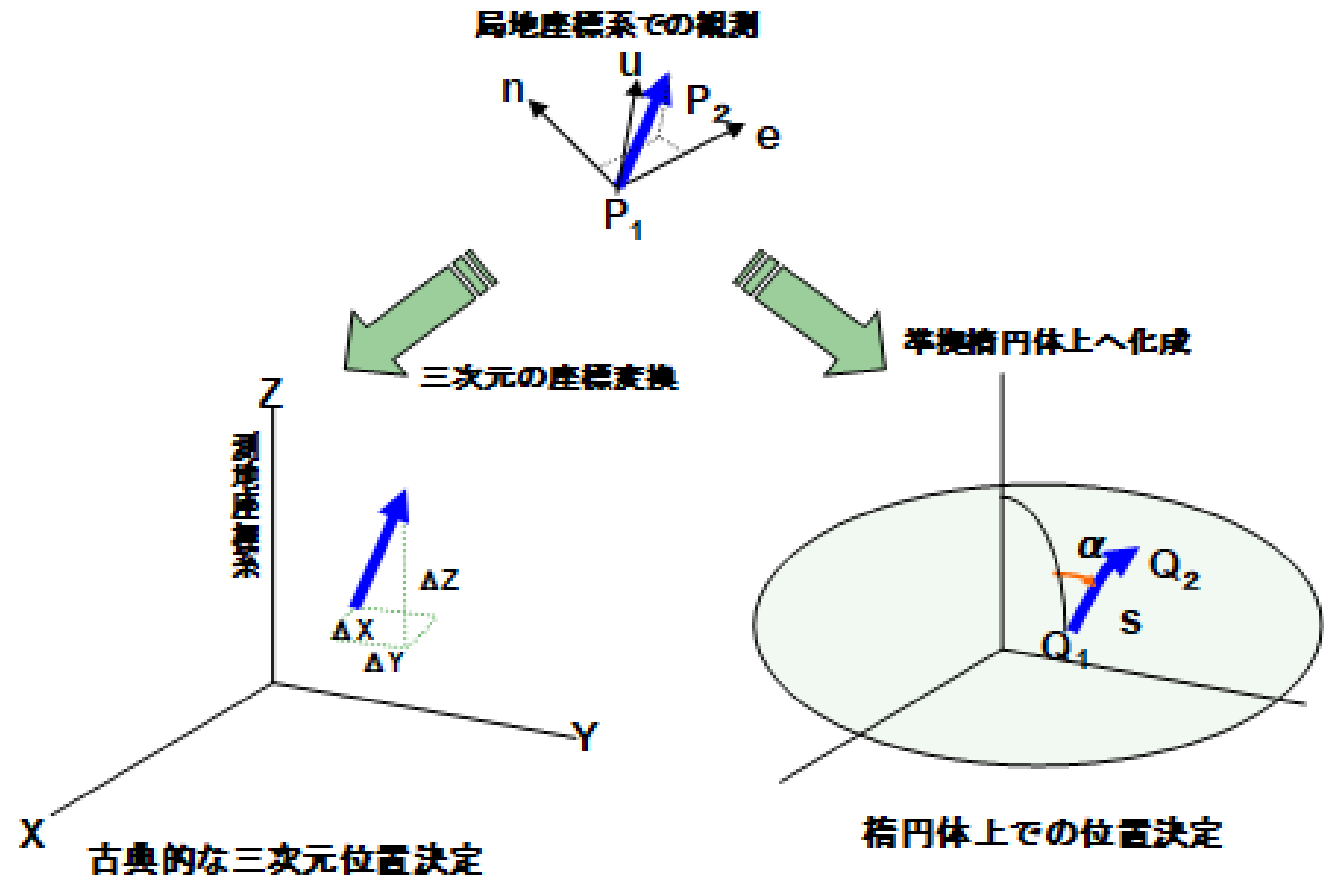
国際原子時と協定世界時、GPS時

三次元方式の位置決定

- 局地座標系で既知点から未知点に対する距離観測と方位角観測、鉛直角観測を行い、既知点から未知点への未知ベクトルを求める。
- 局地座標系を測地座標系に変換し、測地座標系での未知ベクトルを求める。
- 問題は鉛直角観測の精度が、大気の影響で悪いことである。それゆえこの方法は原理的には分かりやすいが、実際の位置決定には用いられなかった。

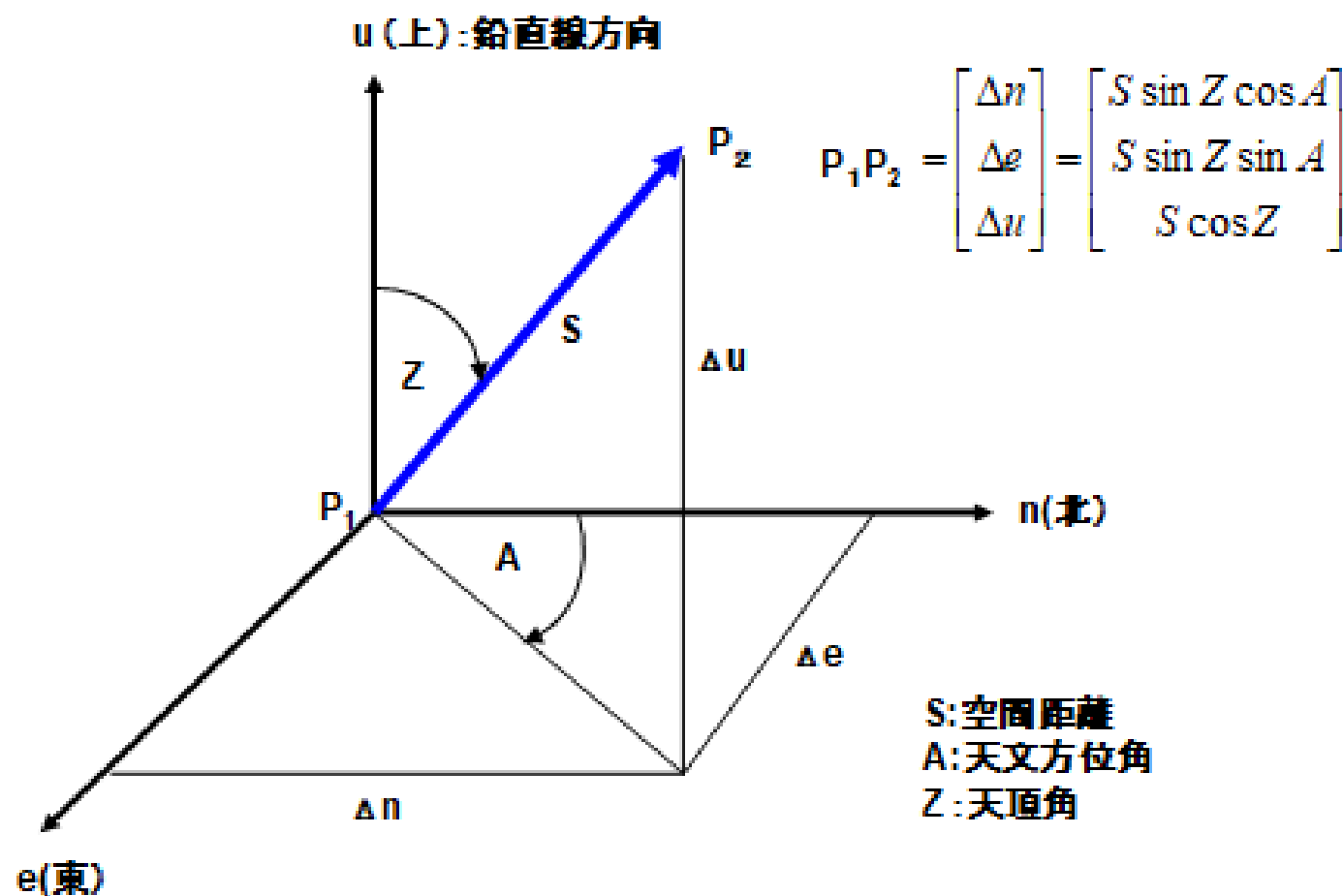
局座標系での観測



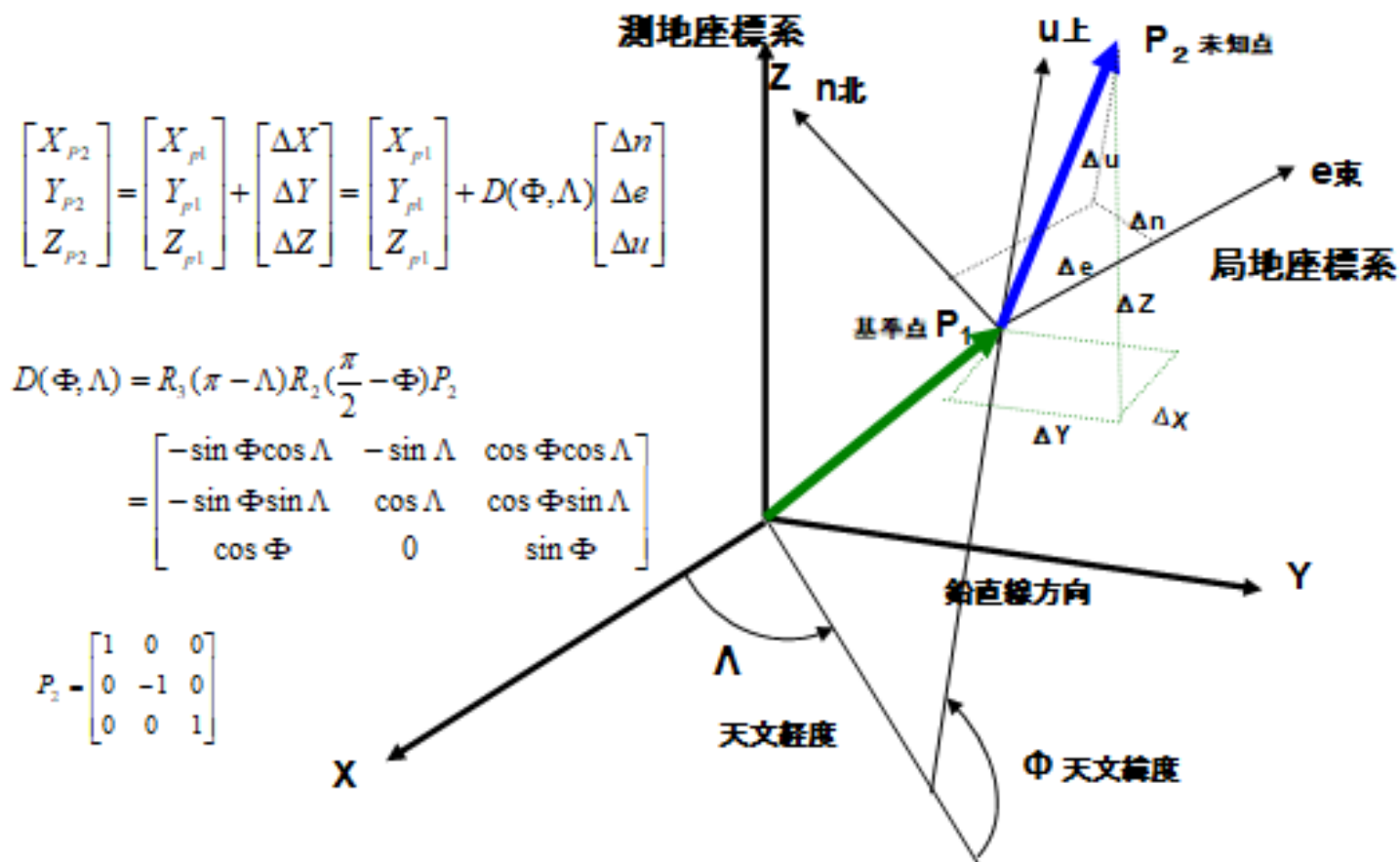


2つの位置決定(測地座標の決定)手法

局地座標系での観測



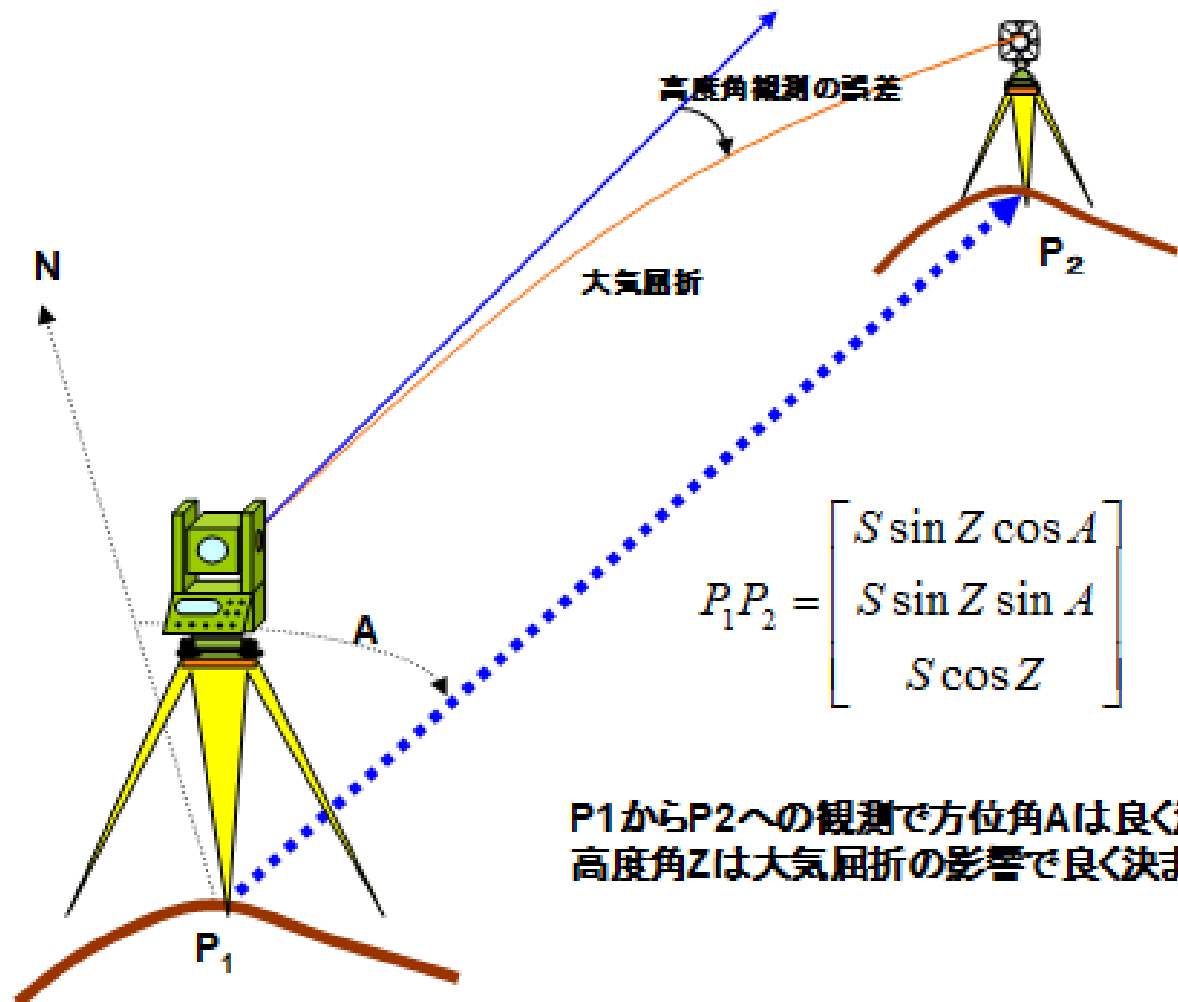
$$\begin{bmatrix} X_{P2} \\ Y_{P2} \\ Z_{P2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{P1} \\ Y_{P1} \\ Z_{P1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{P1} \\ Y_{P1} \\ Z_{P1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\sin \Phi \cos \Lambda & -\sin \Lambda & \cos \Phi \cos \Lambda \\ -\sin \Phi \sin \Lambda & \cos \Lambda & \cos \Phi \sin \Lambda \\ \cos \Phi & 0 & \sin \Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S \sin Z \cos A \\ S \sin Z \sin A \\ S \cos Z \end{bmatrix}$$



古典的な三次元位置決定

三角測量方式での位置決定

- 19世紀、近代測量は三角測量方式で始まった。
- 当時使われていた技術で最も精度の高いものはトランシットによる角度の測量であった。
- 角度観測の誤差では光の屈折の影響が最も大きい。
- 屈折に影響を与える大気の密度は水平方向にはほとんど変化しないが、垂直方向には大きく変化する。
- そのため、水平方向の方位角観測の精度に比べ、垂直方向の高度角観測の精度は非常に悪いのである。



高度角観測の誤差

大気屈折

$$P_1P_2 = \begin{bmatrix} S \sin Z \cos A \\ S \sin Z \sin A \\ S \cos Z \end{bmatrix}$$

P1からP2への観測で方位角Aは良く決まるが
高度角Zは大気屈折の影響で良く決まらない。

三角測量方式での位置決定

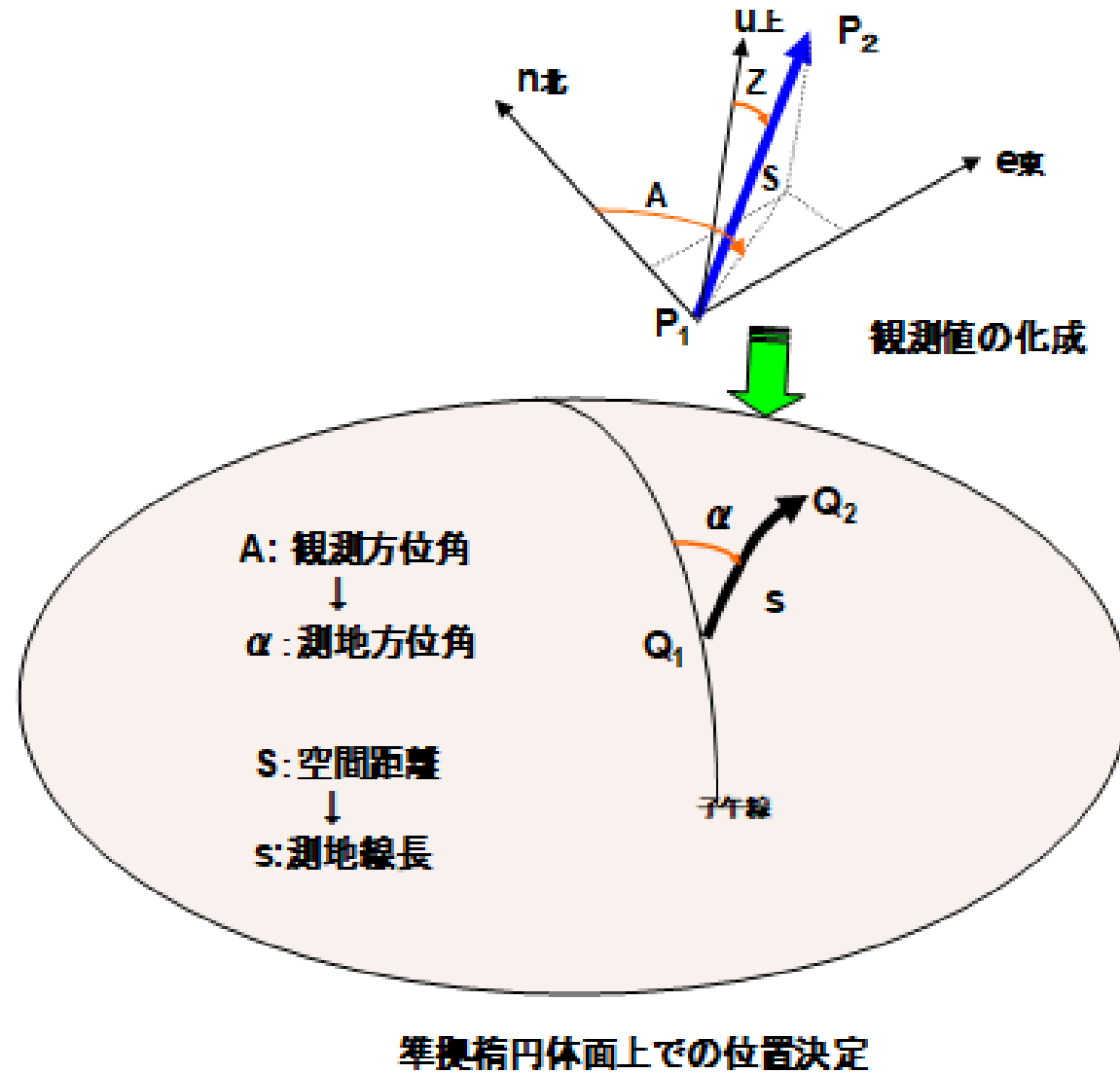
- 水平位置の決定精度と高さ位置の決定精度に差が出てくるため、これを切り離し、水平位置の決定は三角測量で、高さ位置の決定は水準測量でと別体系で行うようにした。
- 水平位置の決定では、すべての観測値は準拠楕円体面上の値に変換され、位置の計算は、準拠楕円体面上で行われる。
- 観測値の楕円体面上への変換が、誤差なく行われるためには、準拠楕円体は出来るだけ地球表面の形と乖離してないのが望ましい。
- 地球の形に出来るだけ適合したいいわゆる“最適楕円体”を求める研究が続いたのはこのためである。



準拠楕円体面上での水平位置決定: 三角測量

高さ方向に多少の誤差があっても、楕円体面上での水平位置にはほとんど影響しない。

観測値は準拠楕円体上の値に変換（化成）される。



楕円体面上 の幾何学

- 位置の計算が準拠楕円体面上で行われるため、三角測量では、楕円体面上の幾何学知識が必要になる。
- 地上で2点間を結ぶ直線は準拠楕円体面上では、測地線と呼ばれる曲線に変換される。
- 地上で観測される観測方位角は、準拠楕円体面上では、測地方位角と呼ばれる角度に変換される。
- 位置の計算は、この測地線の長さと同地方位角を使って行われる。

楕円の幾何学

楕円は長半径 a と短半径 b を与えれば決まる。楕円の長軸を x 軸、短軸を z 軸にとれば、

楕円の式は $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$ で表せる。楕円の扁平率や離心率は次のように定義される。

$$\text{扁平率: } f = \frac{a-b}{a}, \text{ 第1離心率: } e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}, \text{ 第2離心率: } e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2}$$

回転楕円体はこの楕円を短軸の回りに回転させればできる。回転楕円体面の式は

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$ で表される。回転楕円体面上の直交座標と楕円体座標の関係は、「座

標系」の処で導いた式から次のようになる。

$$x = N \cos \varphi \cos \lambda$$

$$y = N \cos \varphi \sin \lambda$$

$$z = \frac{b^2}{a^2} N \sin \varphi$$

$$\text{ここで } N = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}}$$

楕円体面上 の 微分式

子午線方向の断面図で緯度 φ での子午線曲率半径を M とし、 φ と $\varphi + d\varphi$ の間の微小距離を ds としよう。すると $ds = Md\varphi$ であるからこれから、

$$M = \frac{ds}{d\varphi} = \frac{ds}{dz} \frac{dz}{d\varphi} \quad \text{と書ける。} \quad \text{ここで上図の微小三角形で} \quad dz = ds \cos \varphi$$

である。また $z = \frac{b^2}{a^2} N \sin \varphi$ であるから

これを使うと子午線曲率半径は、

$$M = \frac{ds}{dz} \frac{dz}{d\varphi} = \frac{1}{\cos \varphi} \frac{dz}{d\varphi} = \frac{1}{\cos \varphi} \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{b^2}{a^2} N \sin \varphi \right) = \frac{a^2 b^2}{(a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}}$$

となる。

卯酉線の曲率半径は平行圏の曲率半径から計算できる。卯酉線は子午面に直角で楕円体法線を含む平面による切り口である。この平面を φ だけ傾けた平面で楕円体を切れば切り口は平行圏になることは図から明らかであろう。この場合切り口の曲率半径の比は、切り口平面の交角の余弦（この場合 $\cos \varphi$ ）に等しくなることが知られている。平行圏の

曲率半径は $\sqrt{x^2 + y^2} = N \cos \varphi$ であるから、卯酉線曲率半径は

$$N \cos \varphi / \cos \varphi \equiv N \quad \text{と} \quad N \quad \text{に等しくなる。}$$

結局これらは

$$\text{子午線曲率半径: } M = \frac{a^2 b^2}{(a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}},$$

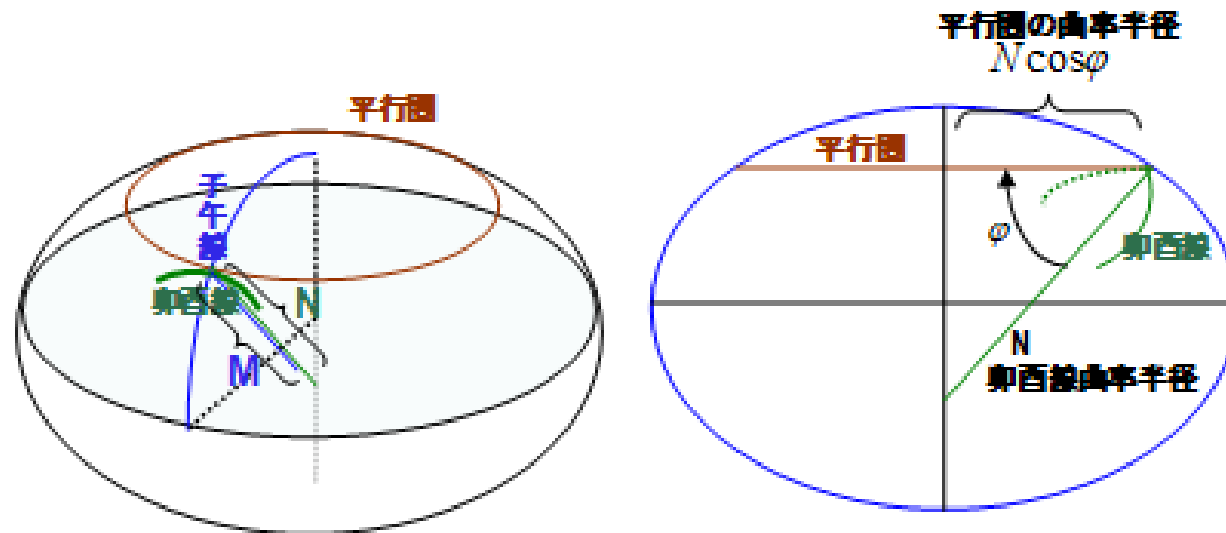
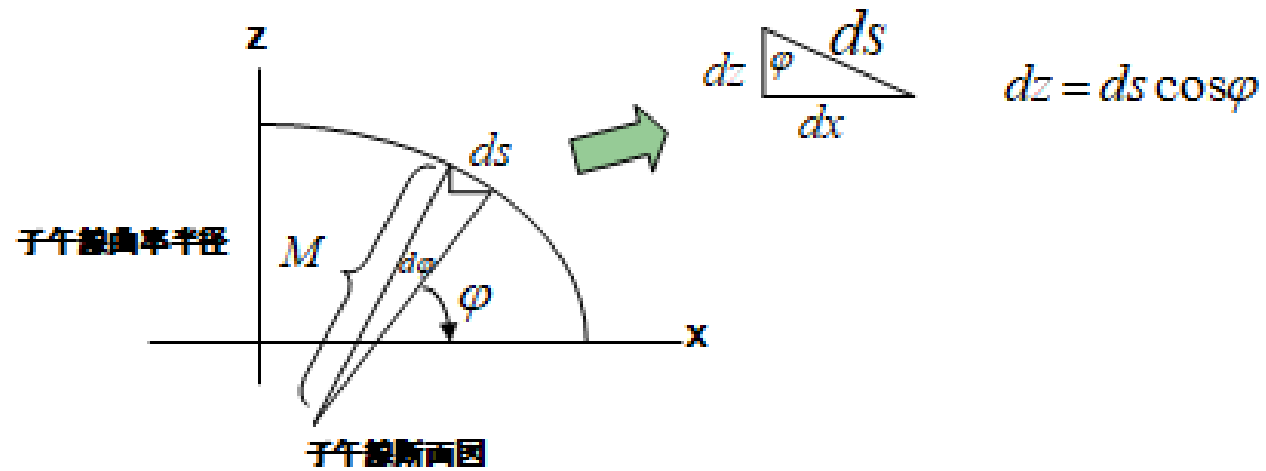
$$\text{卯酉線曲率半径: } N = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}}$$

と表せる。

この他 $c = \frac{a^2}{b}$, $\eta^2 = e'^2 \cos^2 \varphi$, $V^2 = 1 + \eta^2$, $t = \tan \varphi$ で定義される補助量も良く使

われる。この補助量を使えば、例えば曲率半径は $M = \frac{c}{V^3}$, $N = \frac{c}{V}$ と表せる。

楕円体面上の微分式



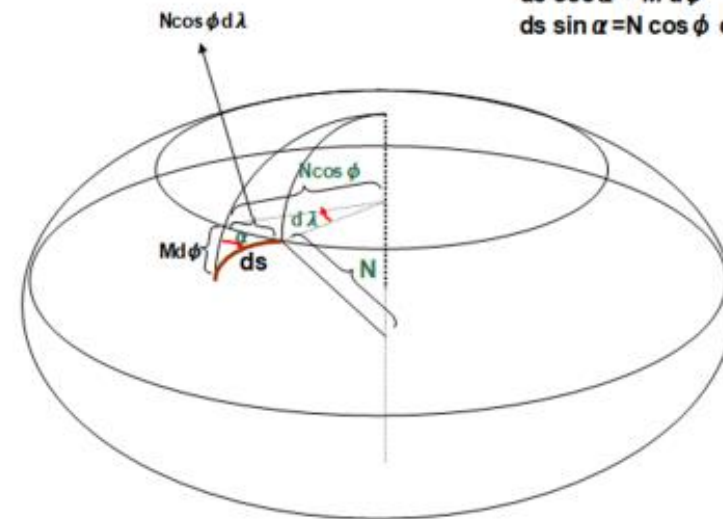
測地線の微分式

測地線の微分式

微小な長さの測地線

測地線の微分式

$$\begin{aligned} ds \cos \alpha &= M d\phi \\ ds \sin \alpha &= N \cos \phi d\lambda \end{aligned}$$



測地線の微分式

測地線の微分式 I

測地線は楕円体面上の 2 点を結ぶ最短経路の曲線である。楕円体の大きさに較べて微小な長さの測地線 ds を考えよう。この測地線の方位角を α とすれば、この測地線の子午線方向の成分は $ds \cos \alpha$ であり、卯酉線方向の成分は $ds \sin \alpha$ である。一方子午線方向と卯酉線方向の微小線長は、それぞれ $Md\varphi$ 、 $N \cos \varphi d\lambda$ と表せるから、

$$ds \cos \alpha = Md\varphi$$

$$ds \sin \alpha = N \cos \varphi d\lambda$$

が成り立つ。これから測地線の微分式として

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\cos \alpha}{M}, \quad \frac{d\lambda}{ds} = \frac{\sin \alpha}{N \cos \varphi}$$

が得られる。この微分式は、補助量

$$V = \frac{c}{N}, \quad u = \frac{V}{c} s \cos \alpha, \quad v = \frac{V}{c} s \sin \alpha$$

を使うと

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{V^2}{s} u, \quad \frac{d\lambda}{ds} = \frac{v}{s \cos \varphi}$$

というようにも書ける。これらの微分式を s について更に微分すれば高次の微分式が得られる。結果だけ示すと、例えば

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2} = -\frac{V^4}{c^2} (\sin^2 \alpha \cdot t + 3 \cos^2 \alpha \cdot \eta^2 \cdot t) \quad \frac{d^2\lambda}{ds^2} = \frac{2V^2}{c^2 \cos \varphi} \sin \alpha \cos \alpha \cdot t$$

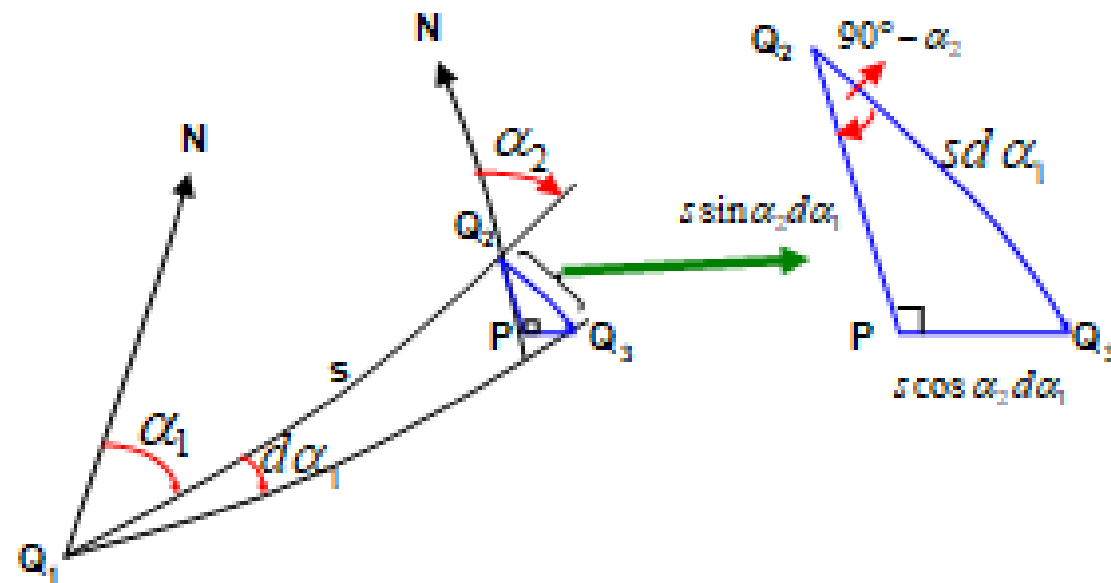
である。

測地線の 微分式

測地線の微分式の応用として今度は楕円体上の2点 Q_1 と Q_2 を結ぶ測地線の長さ s と方位角 α がそれぞれ $ds, d\alpha$ とわずかに変化した場合、測地線の両端点 Q_1, Q_2 の経緯度がどのように変化するのを見よう。これは、測地線の微分量 $\frac{\partial s}{\partial \varphi}, \frac{\partial s}{\partial \lambda}, \frac{\partial \alpha}{\partial \varphi}, \frac{\partial \alpha}{\partial \lambda}$ を明らかにすることでもあり、後で楕円体上の観測方程式を作る際に必要になる。

測地線の 微分式

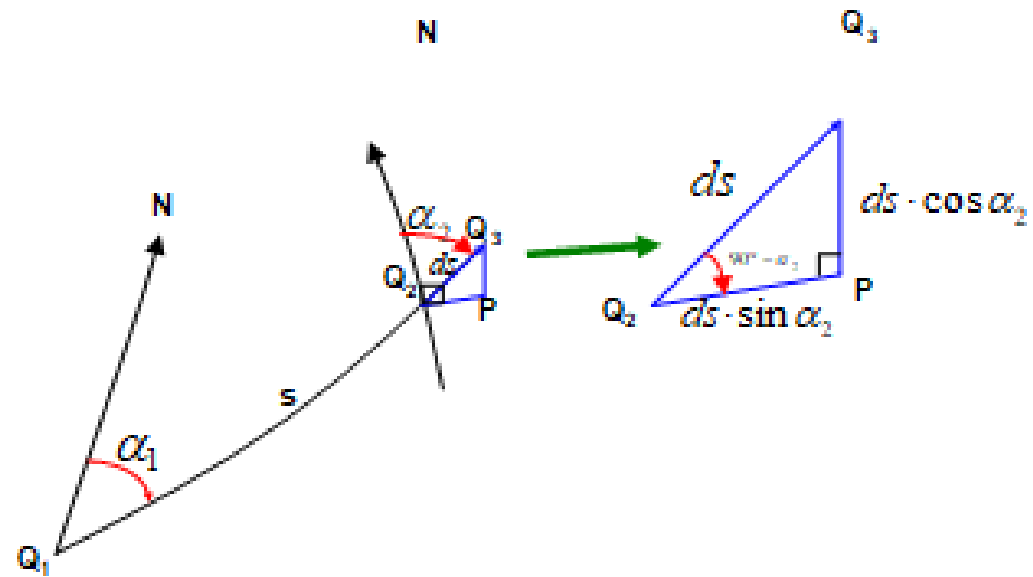
測地線の方位角
変化による経緯
度の変化



Q_1 での方位角変化による Q_2 の経緯度変化

測地線の 微分式

測地線長変化
による経緯度の変化



測地線長変化による Q_2 の経緯度変化

測地線の 微分式 まとめ

測地線長変化と
測地方位角変化
が
経緯度に及ぼす影響

測地線長と方位角の変化が経緯度に及ぼす影響は結局次のように書ける。

$$\begin{aligned}M_2 d\varphi_2 &= -s \cdot \sin \alpha_2 d\alpha_1 + ds \cdot \cos \alpha_2 \\N_2 \cos \varphi_2 d\lambda_2 &= s \cdot \cos \alpha_2 d\alpha_1 + ds \cdot \sin \alpha_2\end{aligned}$$

この式を $ds, d\alpha_1$ について解くと次のようになる。

$$\begin{aligned}ds &= -M_2 \cos \alpha_{21} d\varphi_2 - N_2 \sin \alpha_{21} \cos \varphi_2 d\lambda_2 \\sd\alpha_1 &= M_2 \sin \alpha_{21} d\varphi_2 - N_2 \cos \varphi_2 \cos \alpha_{21} d\lambda_2\end{aligned}$$

- この式は楕円体面上での観測方程式を作るのに使われる。

$$\begin{aligned}\frac{\partial s}{\partial \varphi_1} &= -M_1 \cos \alpha_{12}, & \frac{\partial s}{\partial \lambda_1} &= N_2 \cos \varphi_2^0 \sin \alpha_{21}, \\ \frac{\partial s}{\partial \varphi_2} &= -M_2 \cos \alpha_{21}, & \frac{\partial s}{\partial \lambda_2} &= -N_2 \cos \varphi_2^0 \sin \alpha_{21}, \\ \frac{\partial \alpha}{\partial \varphi_1} &= \frac{M_1 \sin \alpha_{12}}{s_b}, & \frac{\partial \alpha}{\partial \lambda_1} &= \frac{N_2 \cos \varphi_2^0 \sin \alpha_{21}}{s_b}, \\ \frac{\partial \alpha}{\partial \varphi_2} &= \frac{M_2 \sin \alpha_{21}}{s_b}, & \frac{\partial \alpha}{\partial \lambda_2} &= -\frac{N_2 \cos \varphi_2^0 \sin \alpha_{21}}{s_b}\end{aligned}$$

方位角の 化成

- 楕円体面上で位置の計算を行うため、地上での観測方位角(天文方位角)を準拠楕円体面上の測地方位角に変換(化成)する。化成には次の手順を踏む。
 - 1) 鉛直線に基づく観測から楕円体法線に基づく観測に変わることによる方位角変化を補正。
 - 2) 目標物の方位角から目標物の楕円体面上投影点の方位角に変わることによる方位角変化を補正。

方位角の 化成手順 I

天文方位角 A はトランシットの垂直軸を観測点の鉛直線方向に一致させて観測されたものであるが、楕円体上での方位角に直すためにはまずトランシットの垂直軸を観測点における準拠楕円体法線方向に合わせたときに得られるであろう方位角 A_1 に変換しなければならない。この補正量を $\Delta\alpha_1$ とすると

$$A_1 = A + \Delta\alpha_1 \quad \Delta\alpha_1 = -(\Lambda - \lambda) \sin \varphi$$

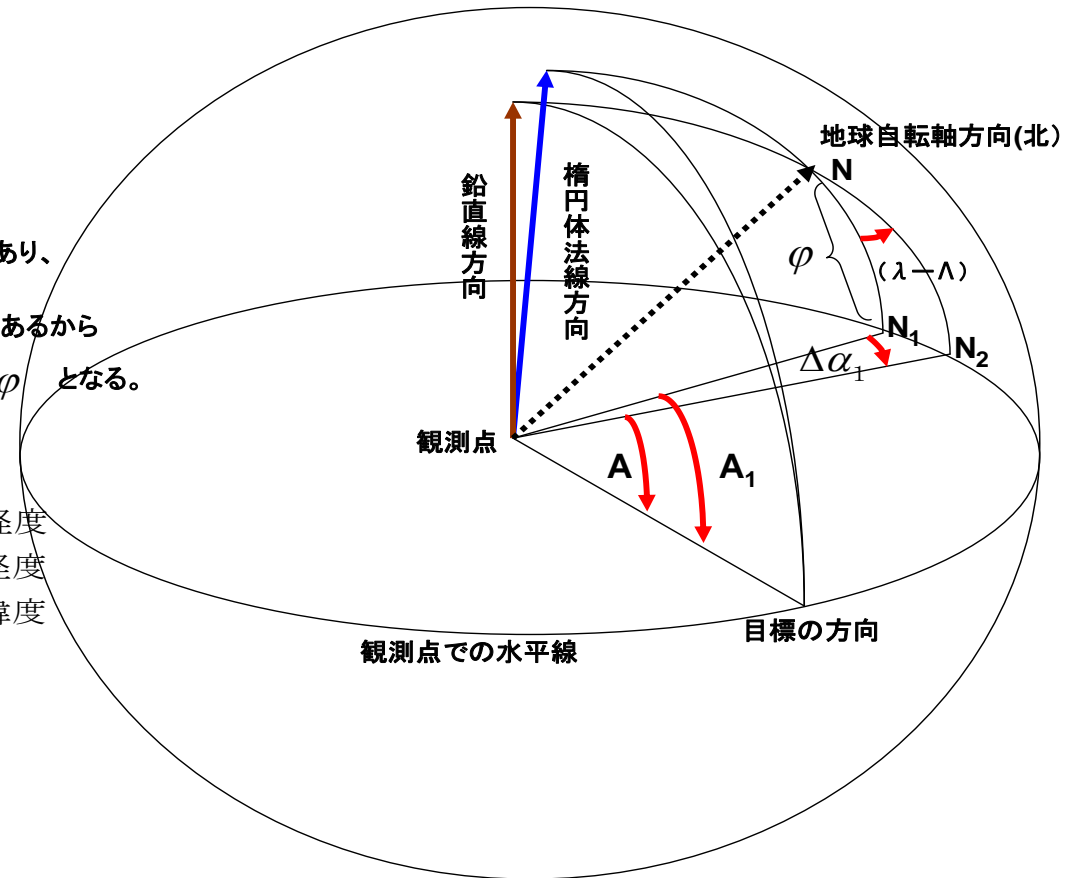
天文方位角 A と楕円体上での方位角 A_1

球面三角形 N, N_1, N_2 で
正弦定理を使えば

$$\frac{\sin(\Delta\alpha_1)}{\sin(\lambda - \Lambda)} = \frac{\sin \varphi}{\sin 90^\circ} \text{ であり、}$$

$\Delta\alpha_1$ と $\lambda - \Lambda$ は微量であるから
 $\Delta\alpha_1 = -(\Lambda - \lambda) \sin \varphi$ となる。

Λ : 観測点の天文経度
 λ : " 測地経度
 φ : " 測地緯度

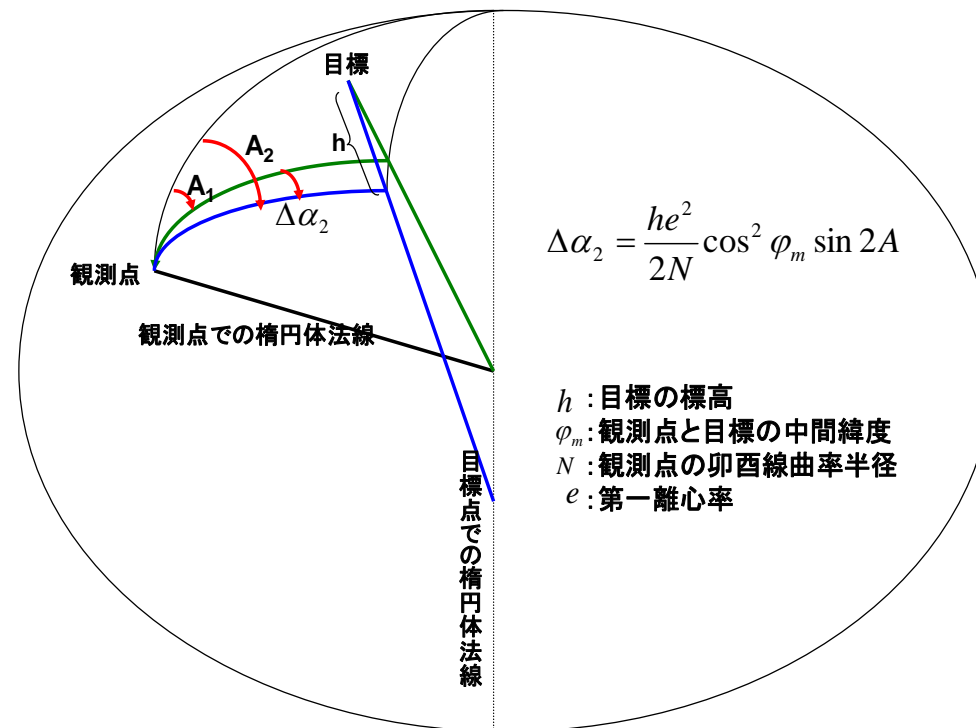


方位角の 化成手順 II

方位角 A_1 はある高さの目標物をトランシットで直接視準して得られる方位角であるが、これを目標物から楕円体面に下ろした垂線の足を（仮想的に）視準した場合に得られる方位角 A_2 に変換しなければならない（測地方位角は、観測点も目標物も楕円体表面上にあるものとして計算する）。すなわち A_2 は、観測点での楕円体法線と目標物から楕円体面に下ろした垂線の足とでできる平面が楕円体面を切る線（これは垂直截線と呼ばれている）の方位角である。この補正量を $\Delta\alpha_2$ とすると、

$$A_2 = A_1 + \Delta\alpha_2 \quad \Delta\alpha_2 = \frac{he^2}{2N} \cos^2 \varphi_m \sin 2A$$

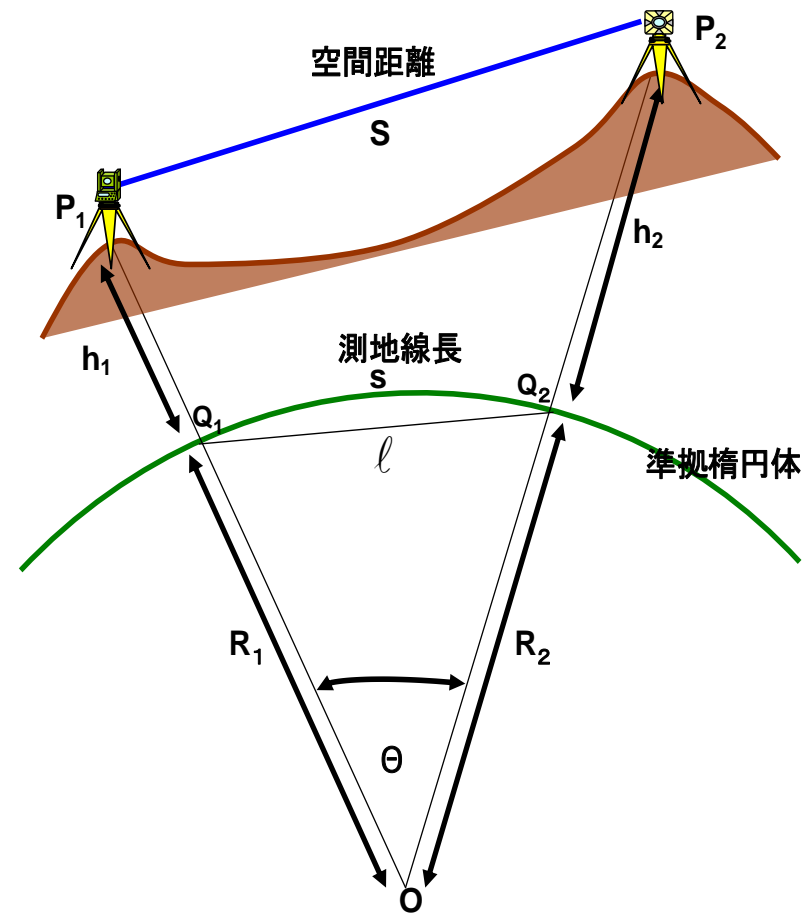
高さ h の目標の方位角 A_1 とその楕円体面への投影点の方位角 A_2



距離の化成

地上の2点 P_1 と P_2 の間で距離観測が行われ、空間距離 S が得られたとしよう。 距離の化成は、 P_1 、 P_2 をそれぞれ楕円体上に投影した点 Q_1 、 Q_2 の間の測地線長 s を求めることである。

距離の化成



距離の 化成手順

化成の順序としては、まず $P_1 P_2$ 間の空間距離 S を $Q_1 Q_2$ 間の空間距離 ℓ に変換し、さらにこれを準拋楕円体上 $Q_1 Q_2$ 間の測地線長 s に変換しなければならない。後者の変換では一般に $Q_1 Q_2$ 間を楕円体面ではなく球面とみなす近似が行われる。測地測量でもこの近似が使われる。この場合 Q_1 、 Q_2 における楕円体の曲率半径 R_1 と R_2 を使ってこの区間の平均曲率半径 R_m を求め、この部分の楕円体はこの平均曲率半径を持つ球に置き換えられる。測地線長 s はこの平均曲率半径を持つ球上での弧長になる。

図の三角形 OP_1P_2 に余弦定理を適用すると

$$S^2 = (R_m + h_1)^2 + (R_m + h_2)^2 - 2(R_m + h_1)(R_m + h_2)\cos\theta$$

である。 $\cos\theta = 1 - 2\sin^2(\theta/2)$ を使うとこれは

$$S^2 = (h_2 - h_1)^2 + \left(1 + \frac{h_1}{R_m}\right)\left(1 + \frac{h_2}{R_m}\right)4R_m^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

となる。一方 Q_1 と Q_2 を結ぶ弦長 ℓ は、図から $\ell = 2R_m \sin(\theta/2)$ であるから、これを上式に代入すると

$$S^2 = (h_2 - h_1)^2 + \left(1 + \frac{h_1}{R_m}\right)\left(1 + \frac{h_2}{R_m}\right)\ell^2$$

である。これを ℓ について解けば

$$\ell = \sqrt{\frac{S^2 - (h_2 - h_1)^2}{\left(1 + \frac{h_1}{R_m}\right)\left(1 + \frac{h_2}{R_m}\right)}}$$

が得られる。この弦長 ℓ を使って球面上の弧長 s を求める。 s は $R_m\theta$ であり、

$\ell = 2R_m \sin(\theta/2)$ から $\theta = 2\sin^{-1}(\ell/2R_m)$ であるから、弧長 s は

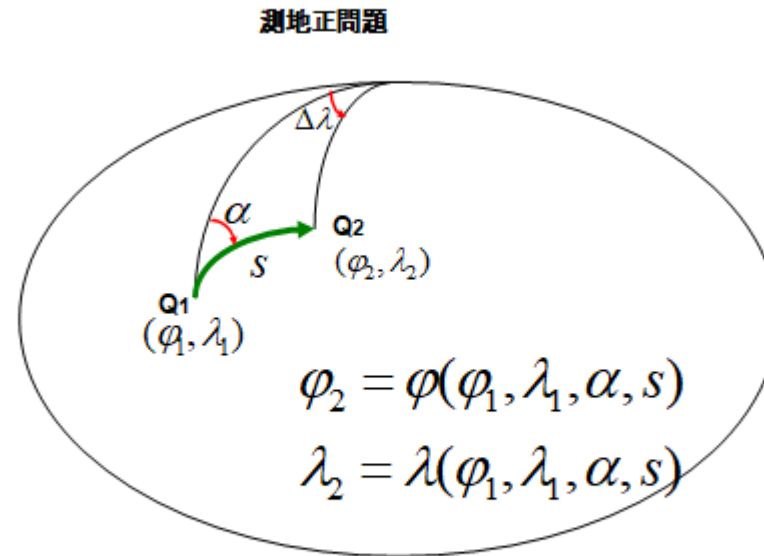
$$s = R_m\theta = 2R_m \sin^{-1} \frac{\ell}{2R_m}$$

と表され、これが求める測地線長になる。

測地正問題

距離、方位角等の観測量がすべて準拋楕円体面上に化成された後は、この楕円体面上で位置の計算が行われる。今地上の既知点 P_1 から未知点 P_2 へ距離 S と方位角 A の観測が行われたとする。

P_1 、 P_2 の楕円体への投影点を Q_1 、 Q_2 とし、距離と方位角の観測量を楕円体上に化成した測地線長、測地方位角 をそれぞれ s 、 α とする。既知点 Q_1 の測地経緯度（楕円体座標）を φ_1, λ_1 とし、未知点 Q_2 の測地経緯度を φ_2, λ_2 とすると、問題は既知点座標 φ_1, λ_1 と s 、 α が与えられたときに、未知点座標 φ_2, λ_2 を求めることである。言い換えると φ_2, λ_2 を、 φ_1, λ_1 と s 、 α の関数として表すことである。これを楕円体上での測地正問題（direct geodetic problem）という。



測地正問題

級数展開による解法

日本の測地測量で用いられてきたのは、展開法と呼ばれているものである。これは $s < 150\text{km}$ 程度の範囲では、楕円体上の距離 s は楕円体の大きさに較べて非常に小さいとして、未知点の経緯度を s に関して級数展開することにより求める方法である。

すなわち φ_2, λ_2 を

$$\varphi_2 = \varphi(\varphi_1, \lambda_1, \alpha, s) \cong \varphi_1 + \frac{d\varphi}{ds} s + \frac{1}{2} \frac{d^2\varphi}{ds^2} s^2 + \frac{1}{6} \frac{d^3\varphi}{ds^3} s^3 + \dots$$

$$\lambda_2 = \lambda(\varphi_1, \lambda_1, \alpha, s) \cong \lambda_1 + \frac{d\lambda}{ds} s + \frac{1}{2} \frac{d^2\lambda}{ds^2} s^2 + \frac{1}{6} \frac{d^3\lambda}{ds^3} s^3 + \dots$$

と s に関して級数展開し、微分係数は測地線の微分式

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{V^2}{s} u, \quad \frac{d\lambda}{ds} = \frac{v}{s \cos \varphi}$$

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2} = -\frac{V^4}{c^2} (\sin^2 \alpha \cdot t + 3 \cos^2 \alpha \cdot \eta^2 \cdot t) \quad \frac{d^2\lambda}{ds^2} = \frac{2V^2}{c^2 \cos \varphi} \sin \alpha \cos \alpha \cdot t \dots \quad (2-34)$$

を使って計算する。

測地正問題

ル・ジャンドルの方法

$$\begin{aligned}\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{V^2} &= u - \frac{1}{2}v^2t - \frac{3}{2}u^2\eta^2t \\ &\quad - \frac{v^2u}{6}(1 + 3t^2 + \eta^2 - 9\eta^2t^2) - \frac{u^3}{2}\eta^2(1 - t^2) \\ &\quad + \frac{v^4}{24}t(1 + 3t^2 + \eta^2 - 9\eta^2t^2) + \dots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\lambda_2 - \lambda_1) \cos \varphi &= v + vut \\ &\quad - \frac{v^3}{3}t^2 + \frac{vu^2}{3}(1 + 3t^2 + \eta^2) + \dots\end{aligned}$$

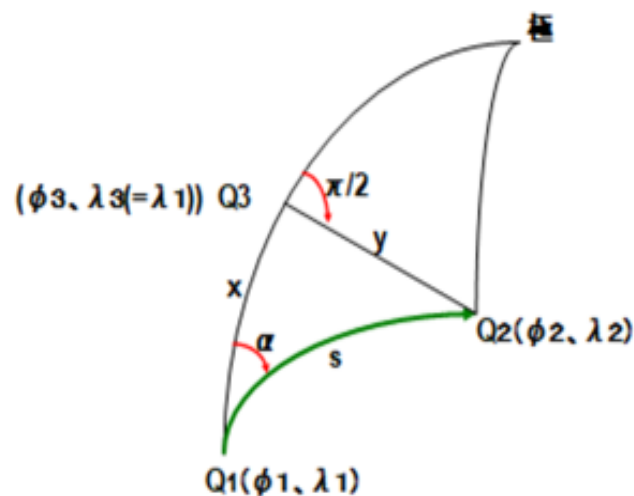
測地正問題

シュライバーの方法

ルジャンドルの展開式は距離が長くなると級数の収束が悪くなる傾向があり、これを避ける為に計算を2つに分けて収束性を改善する方法が考え出された。これがシュライバーの経緯度計算法と呼ばれているものである。

この方法では Q_2 から Q_1 を通る子午線に下ろした垂線の足 Q_3 を経由して経緯度を計算する。すなわち $Q_1 \rightarrow Q_2$ 間の経緯度差を、 $Q_1 \rightarrow Q_3$ 間での経緯度差と、 $Q_3 \rightarrow Q_2$ 間での経緯度差に分けてルジャンドルの展開式を適用する。これにより子午線に沿った $Q_1 \rightarrow Q_3$ 間では $\alpha=0$ であるから $v=0$ となるし、子午線に直角な $Q_3 \rightarrow Q_2$ 間では $\alpha=90^\circ$ で $u=0$ となるから、ルジャンドルの展開式の高次項は小さくなり収束性が改善される。

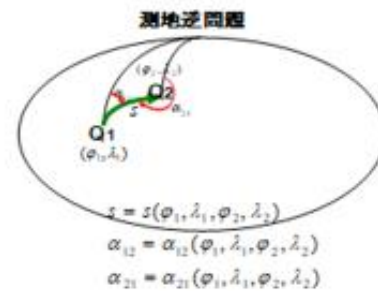
シュライバーの経緯度計算



Q1→Q2 間の経緯度差を
Q1→Q3とQ3→Q2を經由して計算

測地逆問題

Q_1 、 Q_2 の測地経緯度 $(\varphi_1, \lambda_1), (\varphi_2, \lambda_2)$ が与えられたとき、この 2 点を結ぶ測地線長 s とその測地線の方位角を求めることは、測地逆問題 (inverse geodetic problem) と呼ばれている。



測地逆問題 ガウスによる解法

ガウスの平均緯度の式も出発点は、緯度、経度、方位角を測地線長の級数展開式で表すルジャンドルの式である。ただ級数展開を行う点を $Q_1 Q_2$ 間の測地線長を2分する中間点 Q_m とするところが違っている。 $Q_m Q_2$ は $s/2$ であるから Q_m の経度から Q_2 の経度を求めるルジャンドルの展開式は

$$\lambda_2 = \lambda_m + \frac{d\lambda}{ds} \frac{s}{2} + \frac{1}{2} \frac{d^2\lambda}{ds^2} \left(\frac{s}{2}\right)^2 + \frac{1}{6} \frac{d^3\lambda}{ds^3} \left(\frac{s}{2}\right)^3 + \dots$$

である。この式で $s/2$ の代わりに $-s/2$ を使えば、 Q_m の経度から Q_1 の経度を求める

$$\lambda_1 = \lambda_m - \frac{d\lambda}{ds} \frac{s}{2} + \frac{1}{2} \frac{d^2\lambda}{ds^2} \left(\frac{s}{2}\right)^2 - \frac{1}{6} \frac{d^3\lambda}{ds^3} \left(\frac{s}{2}\right)^3 + \dots$$

が得られる。両式の差をとれば

$$\lambda_2 - \lambda_1 = + \frac{d\lambda}{ds} s + \frac{1}{24} \frac{d^3\lambda}{ds^3} s^3 + \dots$$

となる。同様にして

$$\varphi_2 - \varphi_1 = + \frac{d\varphi}{ds} s + \frac{1}{24} \frac{d^3\varphi}{ds^3} s^3 + \dots \quad \alpha_2 - \alpha_1 = + \frac{d\alpha}{ds} s + \frac{1}{24} \frac{d^3\alpha}{ds^3} s^3 + \dots$$

が得られる。これらの微分係数は点 Q_m で計算されるべきものであるが、ガウスの平均緯度の式ではこれを Q_1 と Q_2 の平均緯度 ($\varphi = (\varphi_1 + \varphi_2)/2$) に対する測地線上の点 Q_m (Q_m と Q_m は非常に近い) における微分係数を使って計算する。式の誘導は長くなるので省略するが、測地線の微分式を使ってこれらの計算を行えば、 $(\varphi_2 - \varphi_1)$ 、 $(\lambda_2 - \lambda_1)$ 、 $(\alpha_2 - \alpha_1)$ が得られ、それらから s と α を解くと次に示す逆問題の式になる。

測地逆問題

ガウス平均緯度の式

ガウスの平均緯度の式

$$s \cdot \sin \alpha = \frac{l \cos \varphi}{N} \left[1 - \frac{l^2}{24} \sin^2 \varphi + \frac{1 + \eta^2 - 9\eta^2 t^2}{24V^4} b^2 \right] \quad (1)$$

$$s \cdot \cos \alpha = \frac{Nb}{V^2} \left[1 - \frac{1}{24} (2 + 3t^2 + 2\eta^2) l^2 \cos^2 \varphi - \frac{b^2 \eta^2}{8V^4} (t^2 - 1 - \eta^2 - 4\eta^2 t^2) \right] \quad (2)$$

$$\alpha_2 - \alpha_1 = l \sin \varphi \left[1 + \frac{l^2 \cos^2 \varphi}{12} V^2 + \frac{1}{24} \frac{b^2}{V^4} (3 + 8\eta^2 + 5\eta^4) \right] \quad (3)$$

ここで

$$l = \lambda_2 - \lambda_1, \quad b = \varphi_2 - \varphi_1, \quad \varphi = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}, \quad \alpha = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \quad \text{である。}$$

$$t = \tan \varphi, \quad \eta^2 = e'^2 \cos^2 \varphi, \quad V^2 = 1 + \eta^2$$

逆問題の計算手順

(1) / (2) から $\tan \alpha = \tan \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$ が得られる。これと (3) から

(2) α_1, α_2 が決まり α も決まる。 α を (1) に代入すれば s も決まる。また $\alpha_{12} = \alpha_1, \alpha_{21} = \alpha_2 + 180^\circ$ である。

超長基線の 測地正問題 と逆問題

級数展開を用いた測地正逆問題の解法は、測地線が三角測量のような短距離の場合には問題なく使えるが、測地線長が数100キロを超える長距離の場合には誤差が大きくなり使えない。

1950年代にH.Rainfordにより長距離の測地線を解く方法が開発され、それにもとづき1975年にコンピュータに適したiteration手法によって、測地線長に関係なく測地正問題、逆問題を解く方法がT.Vincentyによって提案された。

超長基線の 測地正問題

T.Vincentyの式

T.Vincentyの式で使われている諸量は以下のようなものである。

a : 楕円体の長半径 b : 短半径 f : 扁平率、

φ_1, φ_2 : 対象とする点の緯度、

U_1, U_2 : 対象とする点の化成緯度、 $U_1 = \arctan[(1-f) \tan \varphi_1]$ 、 $U_2 = \arctan[(1-f) \tan \varphi_2]$ 、

$\Lambda = \lambda_2 - \lambda_1$: 対象とする点の経度差、 L_1, L_2 : 補助球での経度、

α_2, α_1 : 対象とする点での測地方位角、 α : 赤道における方位角、

s : 対象とする点間の測地線長、 σ : 対象とする点間の補助球での弧長

まず T.Vincenty の測地正問題 ($\varphi_1, L_1, s, \alpha_1$ が与えられた時、 φ_2, L_2, α_2 を求める) の結果を示す。

はじめに以下の諸量の計算を行う。

$$U_1 = (1-f) \tan \varphi_1$$

$$\sigma_1 = \arctan\left(\frac{\tan U_1}{\cos \alpha_1}\right)$$

$$\sin \alpha = \cos U_1 \sin \alpha_1 ; \cos^2 \alpha = (1 - \sin \alpha)(1 + \sin \alpha)$$

$$u^2 = \cos^2 \alpha \frac{a^2 - b^2}{b^2}$$

$$A = 1 + \frac{u^2}{16384} \{4096 + u^2 [-768 + u^2 (320 - 175u^2)]\}$$

$$B = \frac{u^2}{1024} \{256 + u^2 [-128 + u^2 (74 - 47u^2)]\}$$

ここで、 σ の初期値を $\sigma = s/bA$ として以下の3つの式の計算を繰り返す。

$$2\sigma_m = 2\sigma_1 + \sigma$$

$$\Delta\sigma = B \sin \sigma \left\{ \cos(2\sigma_m) + \frac{1}{4} B \left[\cos \sigma (-1 + 2 \cos^2(2\sigma_m)) - \frac{1}{6} B \cos(2\sigma_m) (-3 + 4 \sin^2 \sigma) \right] - 3 \right\}$$

$$\sigma = \frac{s}{bA} + \Delta\sigma$$

σ の値に変化が見られなくなれば (ある任意の微小量を設定し、変化が微小量以下になるということ)、繰り返し計算を止める。

これで σ が決まり、以後これを使って以下の式で正問題の解が求められる。

$$\varphi_2 = \arctan \left(\frac{\sin U_1 \cos \sigma + \cos U_1 \sin \sigma \cos \alpha_1}{(1-f) \sqrt{\sin^2 \sigma + (\sin U_1 \sin \sigma - \cos U_1 \cos \sigma \cos \alpha_1)^2}} \right)$$

$$\lambda = \arctan \left(\frac{\sin \sigma \sin \alpha_1}{\cos U_1 \cos \sigma - \sin U_1 \sin \sigma \cos \alpha_1} \right)$$

超長基線の 測地逆問題

T.Vincentyの式

T.Vincenty の測地逆問題 ($\varphi_1, \varphi_2, \lambda_1, \lambda_2$ が与えられた時、 s, α_1, α_2 を求める) の結果を示す。
まず初期値を $\lambda = \Lambda$ として以下の計算を行う。

$$\sin \sigma = \sqrt{(\cos U_2 \sin \lambda)^2 + (\cos U_1 \sin U_2 - \sin U_1 \cos U_2 \cos \lambda)^2}$$

$$\cos \sigma = \sin U_1 \sin U_2 + \cos U_1 \cos U_2 \cos \lambda$$

$$\sigma = \arctan \frac{\sin \sigma}{\cos \sigma}$$

$$\sin \alpha = \frac{\cos U_1 \cos U_2 \sin \lambda}{\sin \sigma}$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$$

$$\cos(2\sigma_m) = \cos \sigma - \frac{2 \sin U_1 \sin U_2}{\cos^2 \alpha}$$

$$C = \frac{f}{16} \cos^2 \alpha [4 + f(4 - 3 \cos^2 \alpha)]$$

$$\lambda = \Lambda + (1 - C) f \sin \alpha \left\{ \sigma + C \sin \sigma \left[\cos(2\sigma_m) + C \cos \sigma (-1 + 2 \cos^2(2\sigma_m)) \right] \right\}$$

得られた λ を最初の式 ($\sin \sigma = \sqrt{(\cos U_2 \sin \lambda)^2 + (\cos U_1 \sin U_2 - \sin U_1 \cos U_2 \cos \lambda)^2}$)

に代入して同じ計算を繰り返す。 λ に変化が見られなくなれば (ある任意の微小量を設定し、変化が微小量以下になるということ)、 λ が決定する。 α 、 σ 、 σ_m の諸量も決定するから、これらを使い以下の計算で逆問題の解 s 、 α_1 、 α_2 が求まる。

$$u^2 = \cos^2 \alpha \frac{a^2 - b^2}{b^2}$$

$$A = 1 + \frac{u^2}{16384} \left\{ 4096 + u^2 \left[-768 + u^2 (320 - 175u^2) \right] \right\}$$

$$B = \frac{u^2}{1024} \left\{ 256 + u^2 \left[-128 + u^2 (74 - 47u^2) \right] \right\}$$

$$\Delta \sigma = B \sin \sigma \left\{ \cos(2\sigma_m) + \frac{1}{4} B \left[\cos \sigma (-1 + 2 \cos^2(2\sigma_m)) - \frac{1}{6} B \cos(2\sigma_m) (-3 + 4 \sin^2 \sigma) (-3 + 4 \cos^2(2\sigma_m)) \right] \right\}$$

$$s = bA(\sigma - \Delta \sigma)$$

$$\alpha_1 = \arctan \left(\frac{\cos U_2 \sin \lambda}{\cos U_1 \sin U_2 - \sin U_1 \cos U_2 \cos \lambda} \right)$$

楕円体面上での 観測方程式

- 距離観測値、方位角観測値が準拠楕円体上に化成されたらそれらを使って、位置の計算が行われる。
- 一般的には観測値の数が膨大なものになるのと、観測値に含まれる誤差を処理するために、最小二乗法の手法が用いられる。
- 最小二乗法については“最小二乗法のしくみ”を参照せよ。
- ここでは、楕円体面上での測地方位角と測地線長の観測方程式を示す。

測地方位角と測地線長の観測方程式 1

楕円体上の 2 点 Q_1 、 Q_2 を考えよう。その測地経緯度をそれぞれ (φ_1, λ_1) 、 (φ_2, λ_2) とし、 Q_1Q_2 間の測地線長を s とする。またこの測地線の Q_1 における測地方位角を α とする。今観測量として測地線長 s と測地方位角 α をとり、測地経緯度 (φ_1, λ_1) 、 (φ_2, λ_2) を未知量とするような観測モデルを考える。すなわちモデル式は測地逆問題の式

$$s = s(\varphi_1, \lambda_1, \varphi_2, \lambda_2)$$

$$\alpha = \alpha(\varphi_1, \lambda_1, \varphi_2, \lambda_2)$$

である。最小二乗法にかける観測方程式を作るためにこれを線形化する。観測量を観測値とその残差

$$s = s_{ob} + v_s$$

$$\alpha = \alpha_{ob} + v_\alpha$$

に、また未知量を概略値と補正量

$$\varphi_i = \varphi_i^0 + \delta\varphi_i, \quad i = 1, 2$$

$$\lambda_i = \lambda_i^0 + \delta\lambda_i, \quad i = 1, 2$$

にそれぞれ分けてモデル式を線形化すると

$$v_s = \frac{\partial s}{\partial \varphi_1} \delta\varphi_1 + \frac{\partial s}{\partial \lambda_1} \delta\lambda_1 + \frac{\partial s}{\partial \varphi_2} \delta\varphi_2 + \frac{\partial s}{\partial \lambda_2} \delta\lambda_2 + s(\varphi_1^0, \lambda_1^0, \varphi_2^0, \lambda_2^0) - s_{ob}$$

$$v_\alpha = \frac{\partial \alpha}{\partial \varphi_1} \delta\varphi_1 + \frac{\partial \alpha}{\partial \lambda_1} \delta\lambda_1 + \frac{\partial \alpha}{\partial \varphi_2} \delta\varphi_2 + \frac{\partial \alpha}{\partial \lambda_2} \delta\lambda_2 + \alpha(\varphi_1^0, \lambda_1^0, \varphi_2^0, \lambda_2^0) - \alpha_{ob}$$

と観測方程式が得られる。

測地方位角と測地線長の観測方程式 2

前に導いた楕円体面上での微分係数を使うと、測地方位角と測地線長の観測方程式は次のように表せる。

$$v_s = -M_1 \cos \alpha_{12} \delta\varphi_1 + N_2 \cos \varphi_2^0 \sin \alpha_{21} \delta\lambda_1 \\ - M_2 \cos \alpha_{21} \delta\varphi_2 - N_2 \cos \varphi_2^0 \sin \alpha_{21} \delta\lambda_2 + s^0 - s_{ob}$$

$$v_\alpha = \frac{M_1 \sin \alpha_{12}}{s^0} \delta\varphi_1 + \frac{N_2 \cos \varphi_2^0 \sin \alpha_{21}}{s^0} \delta\lambda_1 \\ + \frac{M_2 \sin \alpha_{21}}{s^0} \delta\varphi_2 - \frac{N_2 \cos \varphi_2^0 \sin \alpha_{21}}{s^0} \delta\lambda_2 + \alpha^0 - \alpha_{ob}$$

GPSによる位置決定

GPSの登場により地球上の位置決定は大きく変わった。従来位置決定では、地上の未知点と基準点を結ぶ測距儀による距離観測、あるいはトランシットによる角度観測が主なものであった。これらの観測は、観測点どうしがお互いに見えることが必要である。その為、視通の良い山の上等に観測点を設けて観測を行うが、観測点間の距離はせいぜい40～50キロに制限される。それ以上離れると物理的に視通がとれないのである。GPSはこの制限を取り除いた。観測点どうしの視通は問題にならず、数百キロ離れていても観測が出来るのである。また従来の観測は、観測点に於ける鉛直線方向に基づいた局地座標系で行われるものであり、最終的にはこれから求まる位置を測地座標系での位置に変換する必要があった。このため従来の方法で位置を厳密に求めようとすると、原理的に観測点における鉛直線方向という地球重力場についての情報が欠かせない。GPSはこの束縛をも取り除いた。GPS衛星を介した観測により、観測点の位置を観測点での重力場（鉛直線方向等）に関係なく幾何学的に決定できるようになったのである。これは位置決定の歴史における革命的な変化である。

以下「GPS測位のしくみ」を参照

地球の重力場

地球重力場 地球の重力

ニュートンの万有引力の法則によると、すべての物体はその質量に比例し、その距離の二乗に反比例する力で引き合う。いま距離 r だけ離れた2つの物体の質量をそれぞれ m_1, m_2 とするとこの物体の間に働く万有引力の大きさは

$$F = G \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

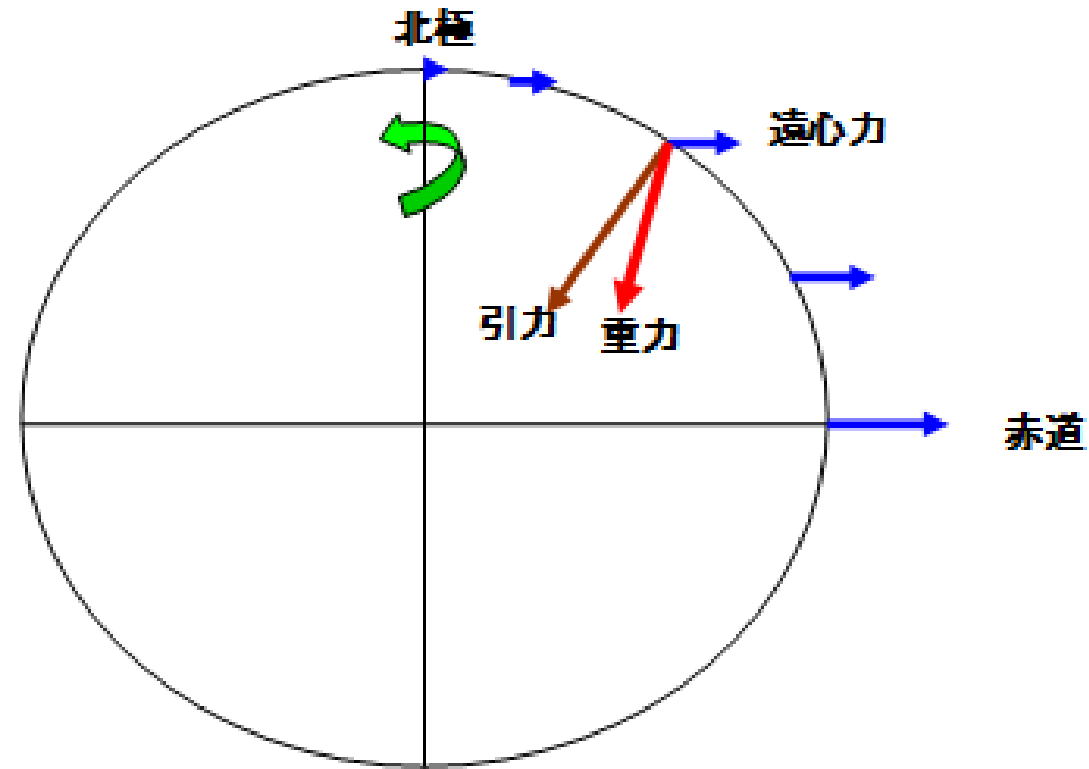
と表せる。ここで G は重力定数と呼ばれており、 $G = 6.673 \cdot 10^{-11} m^3 s^{-2} kg^{-1}$ である。

地上にある物体には、この地球による万有引力の他に地球が自転しているために生じる遠心力が働いている。地球の自転軸から r だけ離れた場所の質量 m の物体に働く遠心力の大きさは、地球の自転角速度を ω とすると

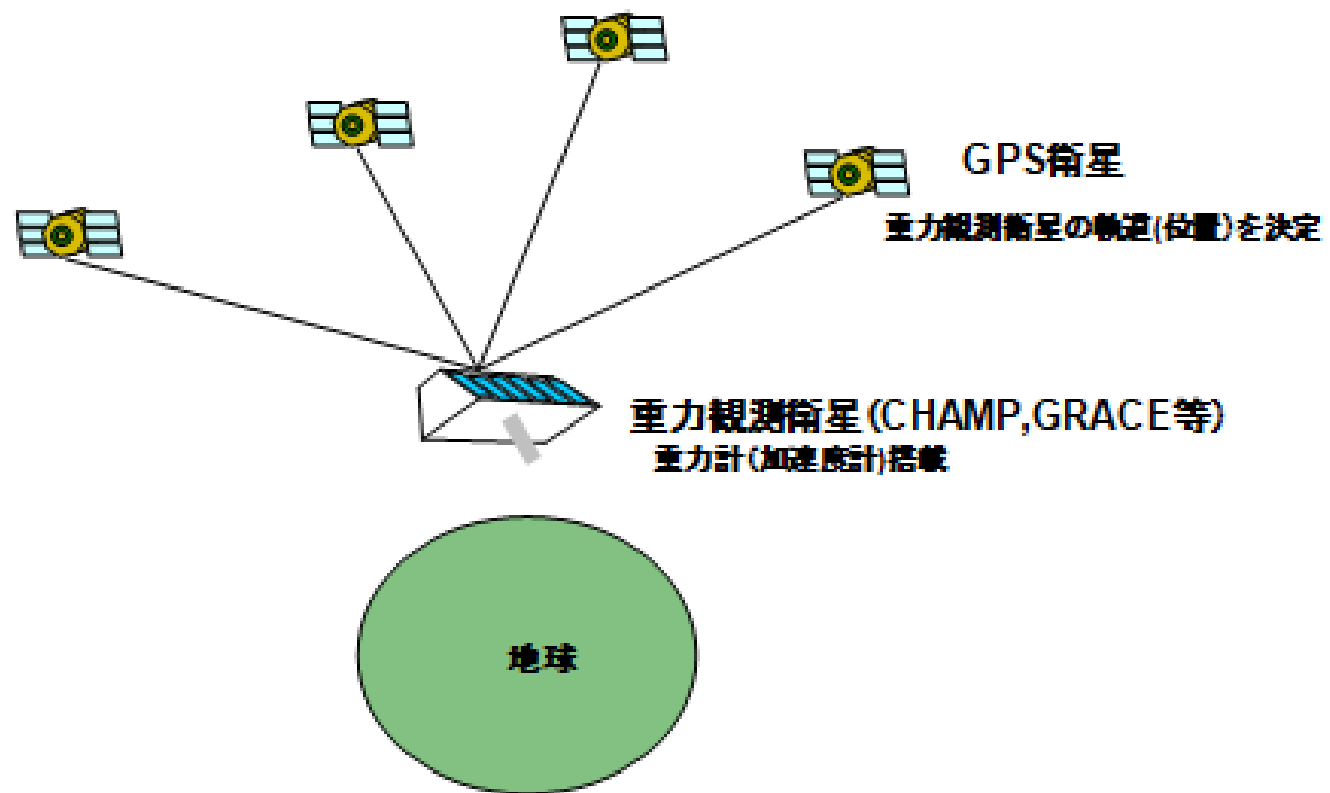
$$f = m \cdot r \omega^2$$

で与えられる。このように遠心力の大きさは地球自転軸からの距離に比例するから、楕円体に近い形をしている地球上では赤道上で最も遠心力は大きくなり、その大きさは万有引力の0.3%程度の大きさになる。地上の物体に働くこの万有引力と遠心力の合力を「重力」と呼んでいる。

地球の重力



地球の引力と重力



衛星による地球重力場の観測

重力ポテンシャル

地球の重力場を扱う場合、重力そのものよりもポテンシャルと呼ばれているものを使うほうが簡単になる。

今三次元直交座標系で2点 $P(x, y, z)$ 、 $Q(\xi, \eta, \zeta)$ を考えよう。 P 点に置かれた単位質量の物体が Q 点に置かれた質量 m から引きつけられる引力の大きさは Gm/r^2 であり、その向きは PQ 方向である (r は P Q 間の距離)。 以下に示すようにこの引力は、1つのスカ

ラー関数 $V = \frac{Gm}{r}$ を使って簡単に表すことができる。

この関数 V を引力ポテンシャルと呼んでいる。 V はエネルギーの次元 (単位) を持っており、引力場での位置エネルギーを表している。 地球全体による引力を考える場合は、地球内部の質量による影響をすべて足し合わせなければならない。この場合には引力ポテンシャルは

$$V = \sum_i \frac{Gm_i}{r_i} \Rightarrow \int_v \frac{G}{r} \rho dv$$

で定義できる。 ここで ρ は積分をおこなう Q 点での質量密度である。 地球による引力はこの V を微分することで計算できる。

重力の場合は遠心力も考慮しなければならない。 $P(x, y, z)$ 点の単位質量に働く遠心力の大きさ \mathbf{f} は

$$\mathbf{f} = (f_x, f_y, f_z) = \omega^2(x, y, 0) = \nabla \left(\frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2) \right)$$

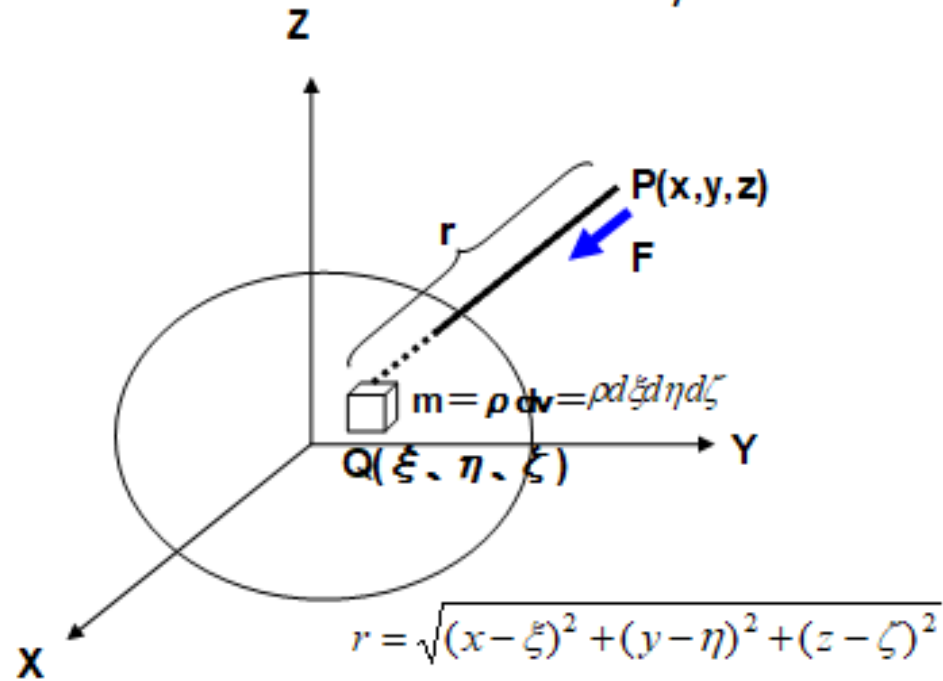
と表せることから、 $\omega^2(x^2 + y^2)/2$ を遠心力のポテンシャルと見なすことができる。従って引力のポテンシャルと遠心力のポテンシャルを足し合わせた

$$W(x, y, z) = V(x, y, z) + \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2) = \int_v \frac{G}{r} \rho dv + \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2)$$

は重力ポテンシャルになり、重力はこの重力ポテンシャルを微分することで計算することができる。

引カポテンシャル

P点での引カポテンシャル: $V = \int \frac{G}{r} \rho dv$



引力ポテンシャルの性質

ラプラス方程式が成り立つ

$$\frac{\partial^2 V}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 V}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2 V}{\partial^2 z} = 0$$

このポテンシャルは

$V = \int_v \frac{G\rho}{l} dv$ で定義されることは前に述べたが、重要な性質をいくつか持っている。

つぎのような微分式が成り立つ。

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \int_v \frac{-(x-x')G\rho}{l^3} dv \quad (4-10)$$

であるからこれをさらに微分すると

$$\frac{\partial^2 V}{\partial^2 x} = \int_v \frac{(-l^2 + 3(x-x')^2)G\rho}{l^3} dv \quad (4-11)$$

である。同様に y, z の微分を行うと

$$\frac{\partial^2 V}{\partial^2 y} = \int_v \frac{(-l^2 + 3(y-y')^2)G\rho}{l^3} dv, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial^2 z} = \int_v \frac{(-l^2 + 3(z-z')^2)G\rho}{l^3} dv \quad (4-12)$$

である。これから

$$\frac{\partial^2 V}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 V}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2 V}{\partial^2 z} = 0 \quad (4-13)$$

が得られる。この式はラプラス方程式と呼ばれており引力ポテンシャルの持つ重要な性質を表している。ラプラス方程式はラプラス演算子を使って

$$\Delta V = 0 \quad (4-14)$$

という形でも表される。

引力ポテンシャルの様々な表現

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Y_n(\vartheta, \lambda)}{r^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left[a_{nm} \frac{P_{nm}(\cos\vartheta) \cos m\lambda}{r^{n+1}} + b_{nm} \frac{P_{nm}(\cos\vartheta) \sin m\lambda}{r^{n+1}} \right]$$

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{r} \int_V G\rho dv - \frac{1}{r^3} \int_V G\rho(x\xi + y\eta + z\zeta) dv \\ &\quad + \frac{1}{2r^5} \int_V G\rho \left\{ (2x^2 - y^2 - z^2)\xi^2 + (-x^2 + 2y^2 - z^2)\eta^2 + (-x^2 - y^2 + 2z^2)\zeta^2 \right\} dv \\ &\quad + \frac{3}{r^5} \int_V G\rho(xy\xi\eta + yz\eta\zeta + zx\zeta\xi) dv + \dots \end{aligned}$$

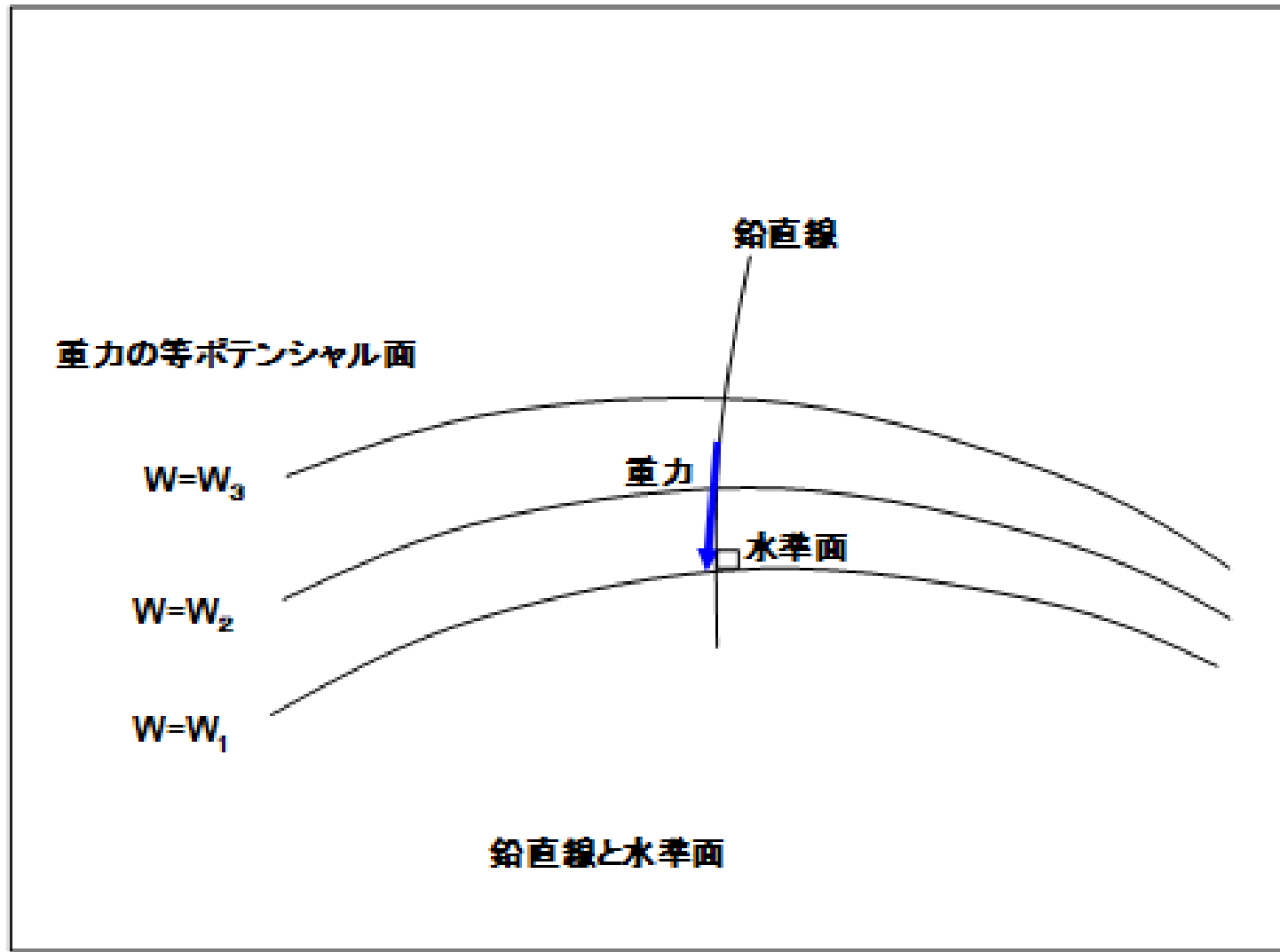
$$V = \frac{GM}{r} \left[1 - \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a}{r} \right)^n J_n P_n(\cos\vartheta) + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^n \left(\frac{a}{r} \right)^n (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\cos\vartheta) \right]$$

重力の等ポテンシャル面

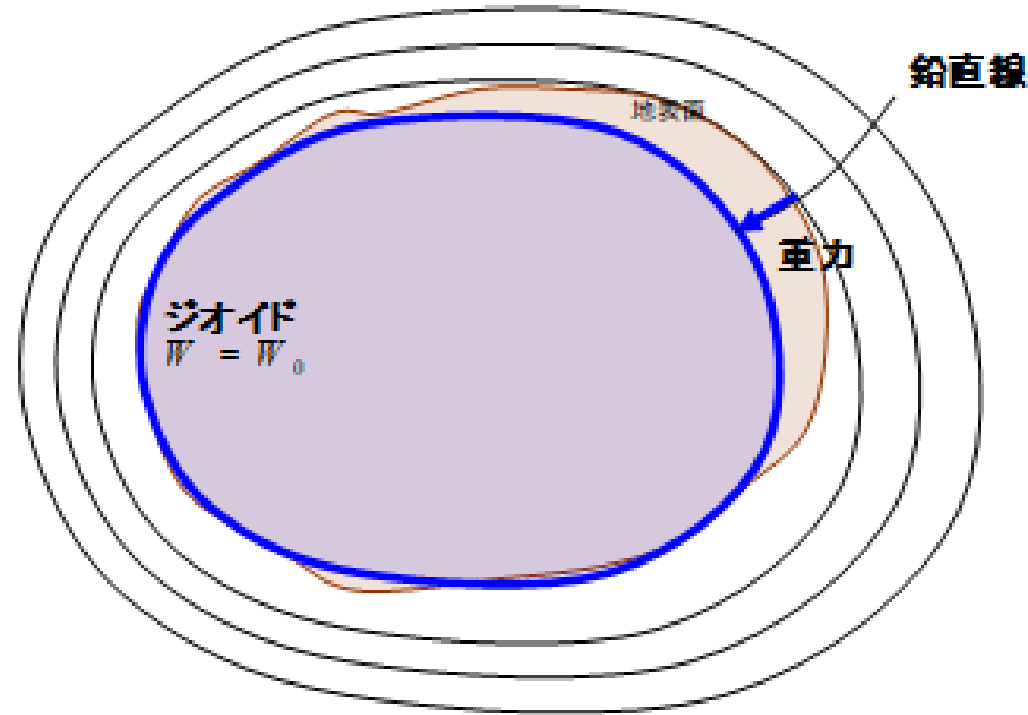
- 重力ポテンシャル $W(x, y, z) = V(x, y, z) + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) = \int \frac{G}{r} \rho dv + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2)$
が一定であるような面を重力の等ポテンシャル面という。

重力の等ポテンシャル面は重力の方向に直交した水準面になっている。

重力の等ポテンシャル面のうち平均海面に一致する等ポテンシャル面をジオイドという。



等ポテンシャル面: $W = \text{定数}$



地表面

鉛直線

重力

ジオイド
 $W = W_0$

ジオイド

正規重力

- 地球楕円体の作り出す重力のことを正規重力という。
- 正規重力の表現

- $$\gamma = \frac{a\gamma_a \cos^2 \varphi + b\gamma_b \sin^2 \varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}}$$
 Somiglianaの式

- 地球楕円体GRS80の定数

$$a = 6378137 \text{ m}$$
$$b = 6356752.3141 \text{ m}$$

楕円体の長半径
楕円体の短半径

$$\gamma_a = 9.7803267715 \text{ ms}^{-2}$$

赤道での正規重力

$$\gamma_b = 9.8321863685 \text{ ms}^{-2}$$

極での正規重力

ジオイドの 決定法

- I 重力法
- II 天文測地法
- III 衛星測地法

重力法

ジオイドは定義により地球重力ポテンシャルの等ポテンシャル面であるから、ジオイドを求めるためには地球の重力場を求める必要がある。

前節で見たように地球重力ポテンシャルは正規重力ポテンシャル U と擾乱ポテンシャル T に分けられ、 U は計算できるから、ジオイドは擾乱ポテンシャル T が分かれば求まる。擾乱ポテンシャルを求めるためにはポテンシャル論についての知識が必要になる。ここではこの T を求める概略のプロセスだけを説明しよう。

1) ポテンシャル T は質量の無いところではラプラス方程式

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$$

を満たす。

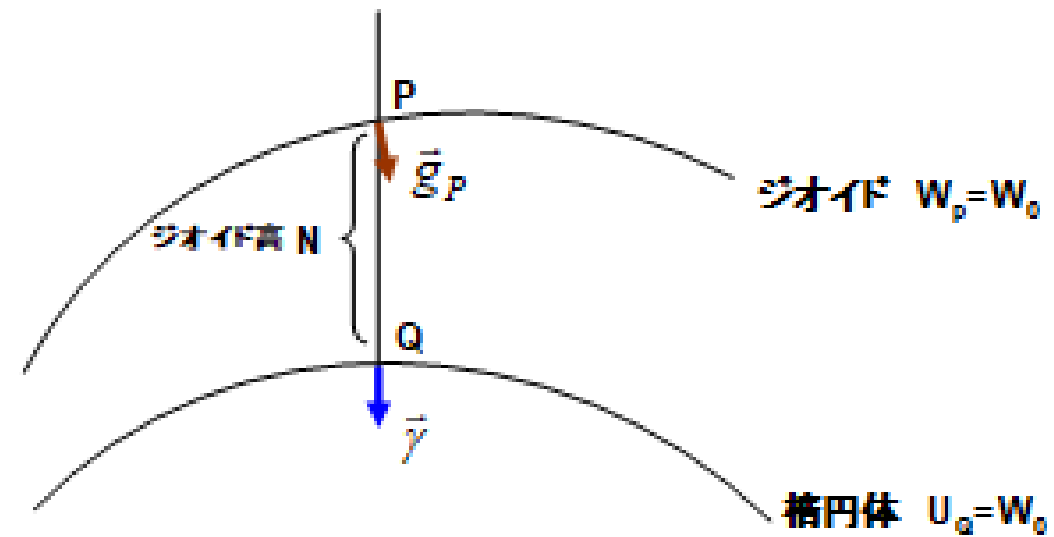
2) ラプラス方程式を満たす関数は、ある境界面上（球面上）でその値（今の場合 T とその微分）が分かっているならば境界面の外側での関数値は数学的に求めることができる（これは有名な境界値問題として知られている）。

3) ジオイドの場合、ジオイド上での T とその微分はジオイド上での重力値を使って表わすことができる。以上のことから、ジオイドをポテンシャル T の境界面とすれば、球近似の場合の T を計算することができ、それからジオイドが求まる。

ジオイドの境界条件

ジオイド上での重力値 : $g_P = |\vec{g}_P|$

楕円体上での正規重力値 : $\gamma = |\vec{\gamma}|$



ジオイドの境界条件

ジオイド上の点 P と P に対応する楕円体上の点を Q とする。

ジオイド上の重力ポテンシャルを $W_P = W_0$ とし、楕円体表面での正規重力

ポテンシャルが $U_Q = W_0$ と同じ値を持つ場合を考える。 PQ 間の距離 N は、楕円体

からジオイドまでの距離でジオイド高と呼ばれている。

$$T = W_P - U_P \quad : \text{擾乱ポテンシャルの定義式}$$

$$T = W_P - U_P = W_P - U_Q + \gamma N \quad : U_P \text{ を } Q \text{ 点でテイラー展開 } \left(\gamma = -\frac{\partial U_Q}{\partial h} \text{ は } Q \text{ 点の正規重力} \right)$$

$W_P = U_Q = W_0$, であるからこれから ジオイド高と擾乱ポテンシャルの関係

$$T = \gamma N$$

が得られる。これはブルンズの式と呼ばれている。同様にして

$$\frac{\partial T_P}{\partial h} = \frac{\partial W_P}{\partial h} - \frac{\partial U_P}{\partial h} = -g_P + \gamma_P \quad : \text{定義式の高さ方向の微分}$$

$$\gamma_P = \gamma + \frac{\partial \gamma}{\partial h} N \quad : \gamma_P \text{ を } Q \text{ 点でテイラー展開}$$

これからジオイド上での境界条件

$$g_P - \gamma = \Delta g = -\frac{\partial T}{\partial h} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial h} T$$

が導かれる。 Δg は重力異常と呼ばれている。

ジオイドのストークス解

ジオイド上での境界条件

$$g_P - \gamma = \Delta g = -\frac{\partial T}{\partial h} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial h} T$$

この境界条件を持つ境界値問題の解はストークスにより解かれており、ストークス関数と呼ばれている関数 $S(\psi)$ を使って

$$T = \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} S(\psi) \Delta g d\sigma$$

T が解ければ、これからジオイド高は

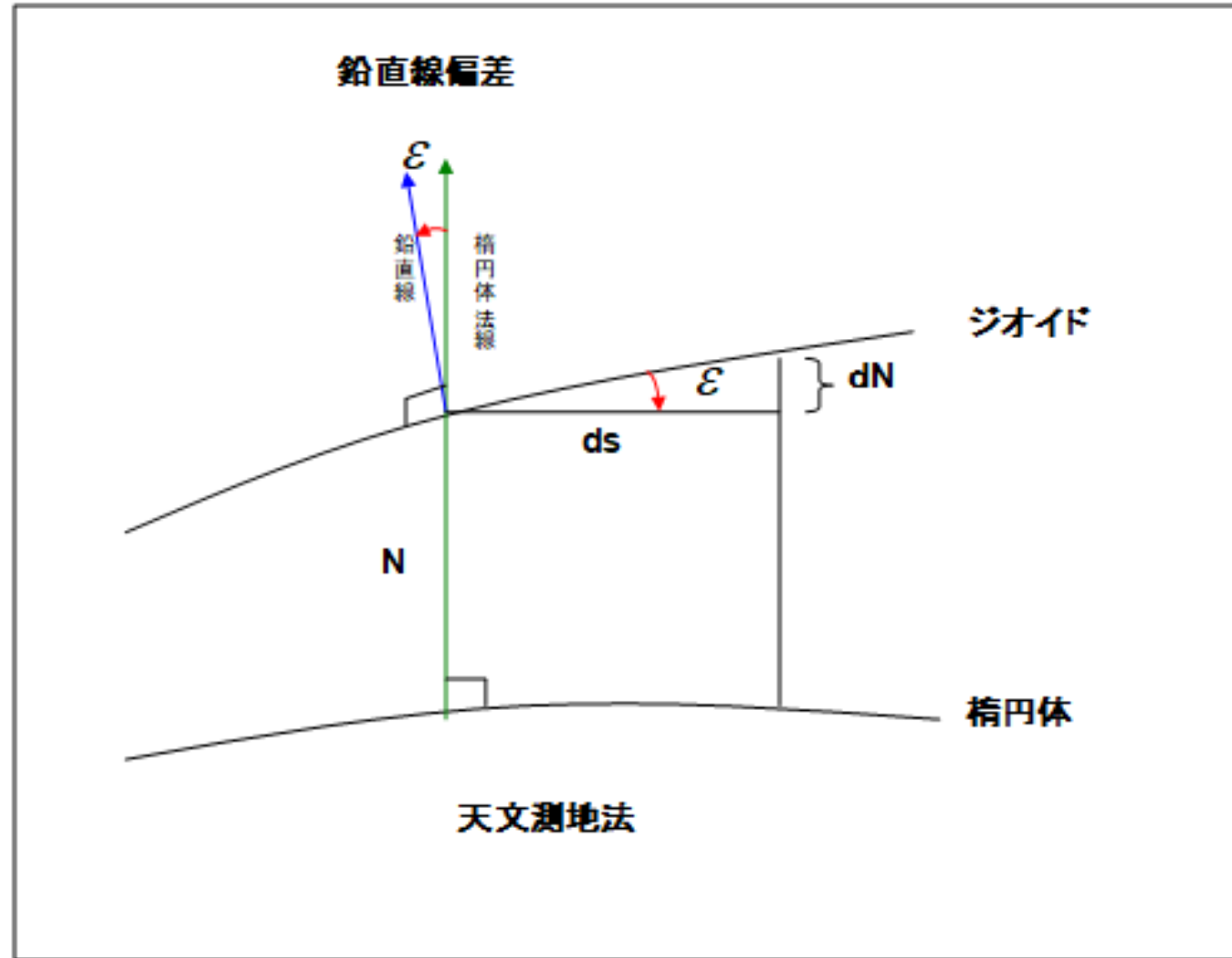
$$N = T / \gamma$$

天文測地法

この方法では重力の大きさではなく重力の向き、すなわち鉛直線の向きを調べることでジオイドを求める。鉛直線はジオイド面に直交しており、その方向は天文経緯度 (Φ, Λ) で表される。一方測地経緯度 (φ, λ) は準拠楕円体の法線方向を表している。鉛直線と楕円体法線方向の差は鉛直線偏差と呼ばれており、これはジオイド面と準拠楕円体面との傾きを表している。いま測地経緯度の分かっているジオイド上で天文経緯度観測を行い、鉛直線偏差が得られたとする。鉛直線偏差は方位角によって値が異なる。方位角 α 方向の鉛直線偏差を ε とすると、この方向に ds だけ離れた点ではジオイド高は $dN = \varepsilon ds$ だけ変化する。これを例えば経路 AB に沿って積分すれば、次のように AB 間のジオイド高の差が求まる。

$$N_B - N_A = \int_A^B \varepsilon \cdot ds$$

天文測地法



衛星測地法

地球の引力ポテンシャルは

$$V = \frac{GM}{r} \left[1 - \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a}{r} \right)^n J_n P_n(\cos \vartheta) + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^n \left(\frac{a}{r} \right)^n (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\cos \vartheta) \right]$$

の形に表せる。

地球の周りを回る人工衛星の運動はこの引力ポテンシャルの影響を受ける。ゼロ近似では

一次項 $\frac{GM}{r}$ だけ考慮すればよく、これはケプラー運動であり楕円軌道になる。2次項以

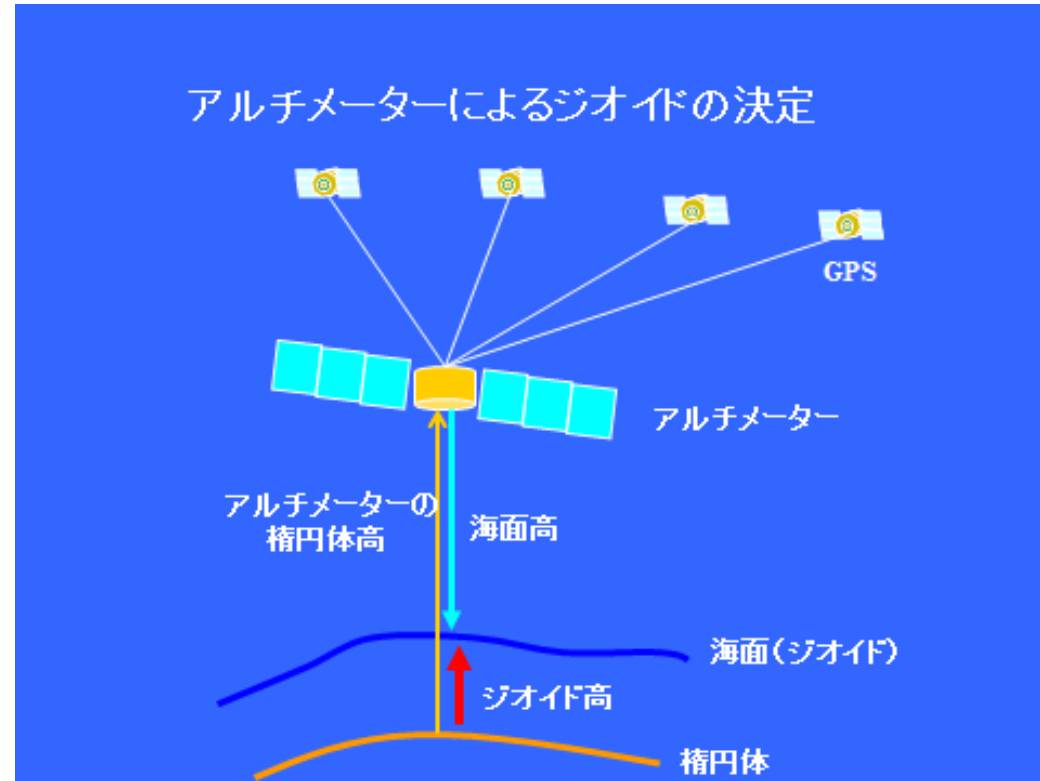
降の高次項の影響は摂動と呼ばれ、これはケプラー楕円軌道の軌道要素が徐々に変化するような影響を及ぼす。摂動の運動方程式は複雑で、入門レベルでは難しいが、例えば昇交点経度 Ω は、衛星の周回毎に

$$\Delta\Omega = -3\pi \left(\frac{a_E}{a} \right)^2 J_2 \cos i$$

(a は軌道長半径、 i は軌道傾斜角)

だけ変化することが摂動方程式から得られている。したがってこの昇交点の変化を観測することでポテンシャルの第2項の係数 J_2 が決定できる。この他の軌道要素の変化量も摂動方程式で引力ポテンシャルの係数と結びついているから、周回ごとの軌道要素の変化量を観測すればポテンシャルの高次係数も求まる。引力ポテンシャルが求まれば重力ポテンシャルも計算でき、それからジオイドが求まる。

衛星測地法 アルチメトリー



様々な ジオイドモデル

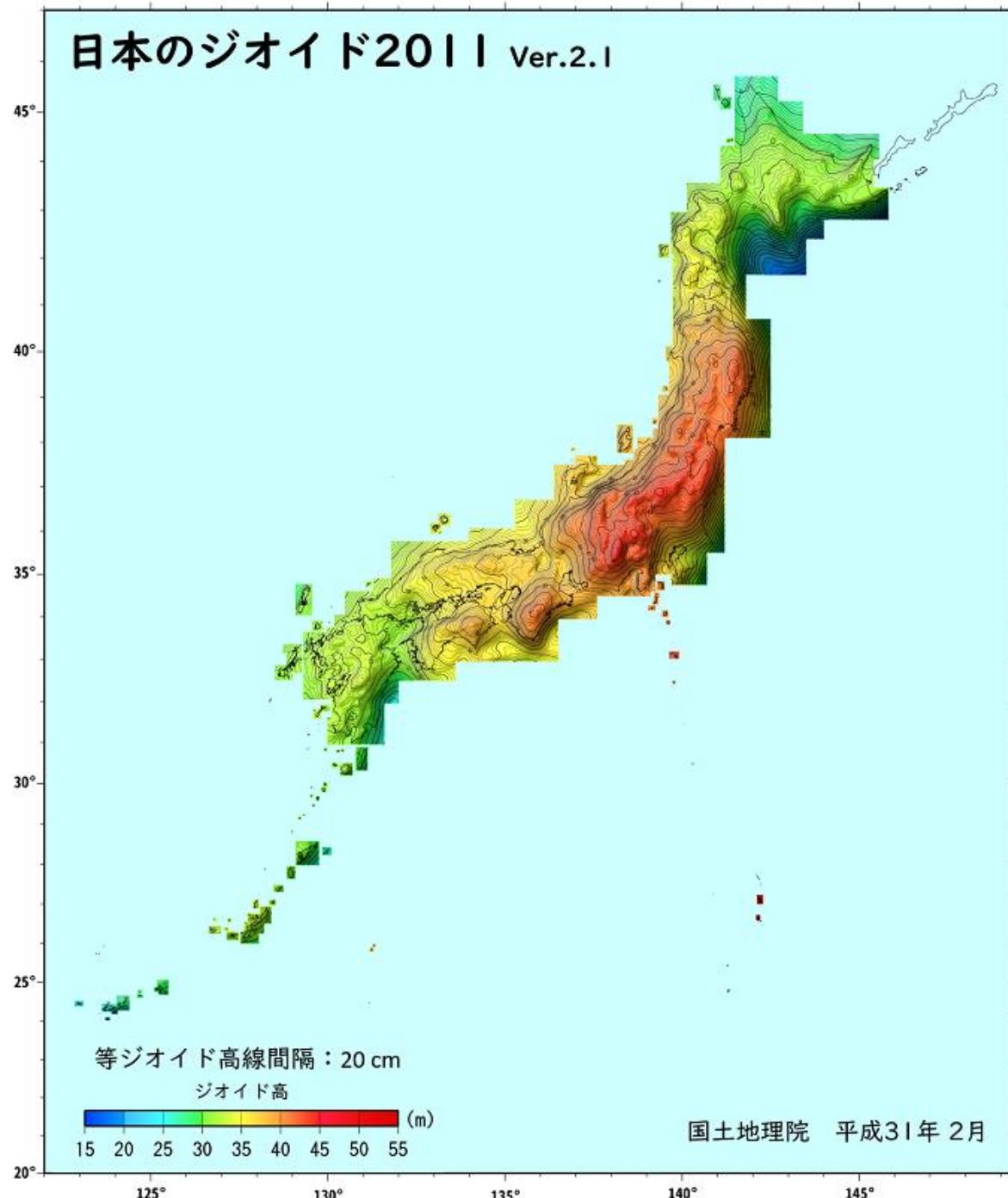
人工衛星の出現によりその軌道の解析から、グローバルなジオイドが分かるようになった。さらにアルチメーターと呼ばれる海面高（ジオイド高でもある）を直接測定できるような人工衛星や、最近では CHAMP や GRACE といった重力加速度計を内蔵した重力観測衛星により、観測の幅も広がり、より詳細なジオイドが決定されるようになってきた。現在、衛星観測データと地上の重力観測データを組み合わせたジオイドモデルの決定が様々な機関によって行われている。北米では NGS（米国測地局）が 1990 年代に衛星データと地上の重力データを組み合わせたジオイドモデルを発表し、現在もそれは改良され続けている。

日本の ジオイドモデル

日本でも国土地理院によって同様のジオイドモデルが発表されている。これは米国 NASA と国防総省の研究所によって求められた EGM96 と呼ばれるグローバルなジオイドと日本周辺での重力観測データから得られるローカルなジオイドを組み合わせて決定されたものである。最新のジオイドには、GPS/水準法で求められた多くの水準点のジオイド高も組み込みこまれており、より信頼性の高いものになっている。（GPS/水準法とは、水準点の上で GPS 観測を行うことで直接ジオイド高を求める方法である。： GPS 観測からは準拠楕円体からの高さ h が求まる。一方水準点はジオイド上の高さ、すなわち正標高 H が与えられているから 水準点のジオイド高 N が $N = h - H$ で求まる。）

現在最新のジオイドは準拠楕円体 GRS80 上のジオイド高として与えられており、国土地理院から「日本のジオイド2011」として公開されている。

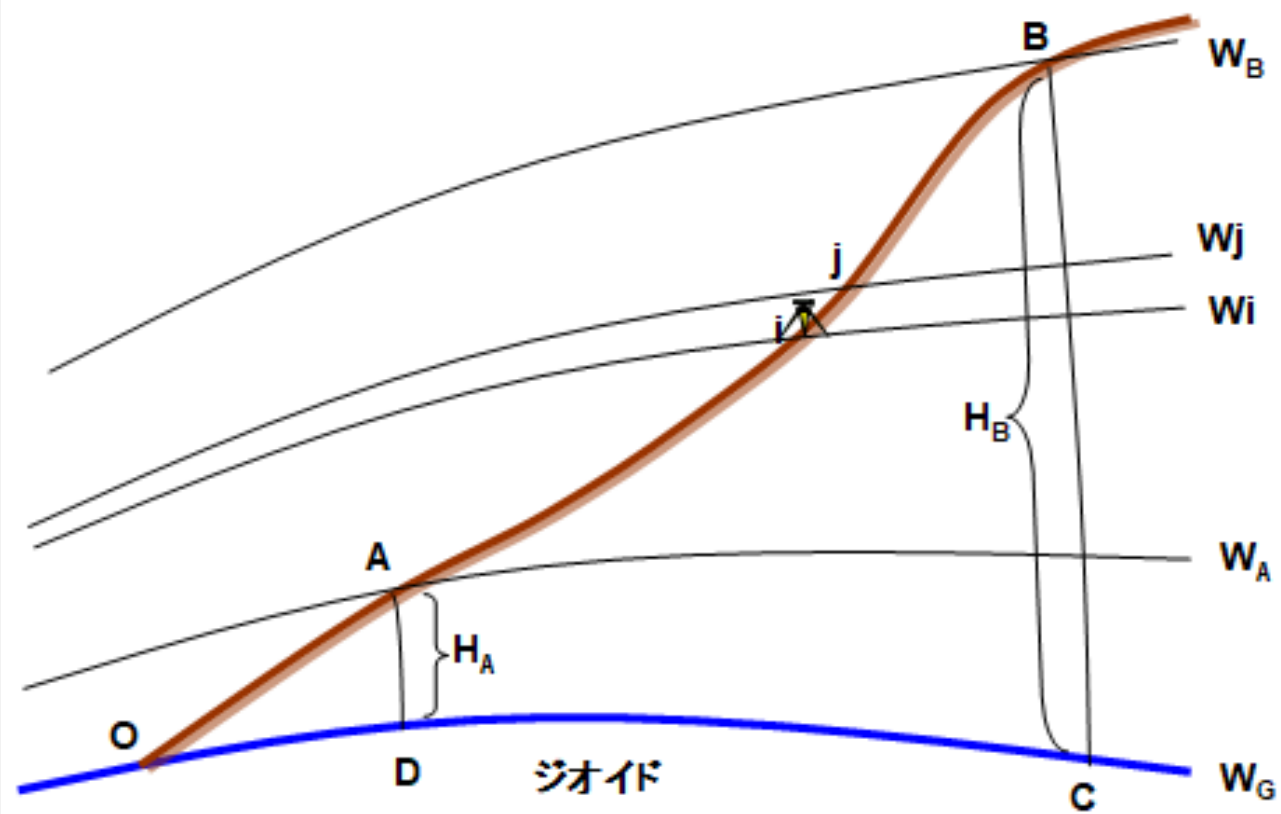
日本の ジオイド2011



重力場と高さ

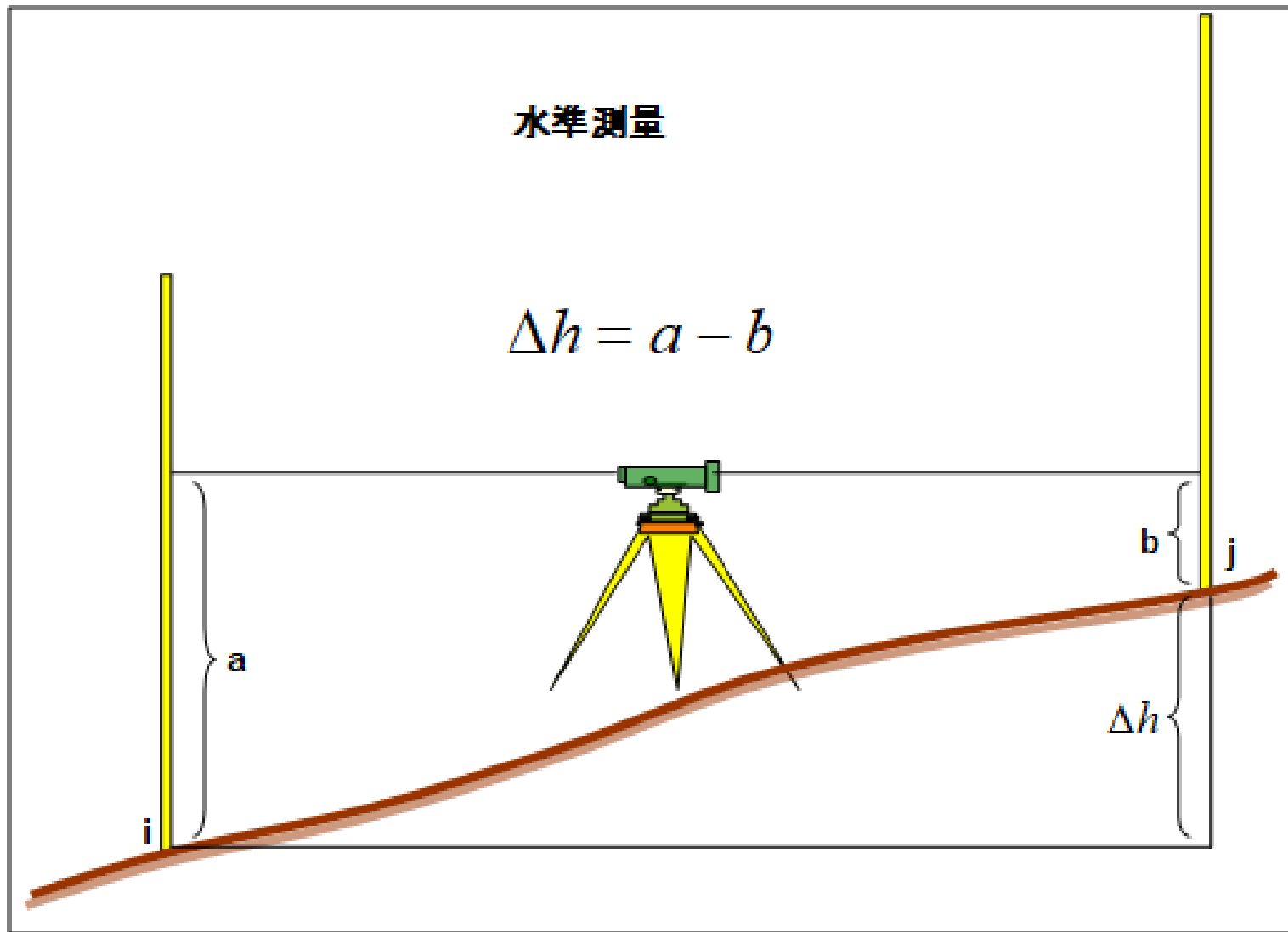
- 高さの基準面はジオイド。
- 高さとは、地球の重力場と結びついた概念。
- 地図に用いられる高さ、正標高は、鉛直線に沿って測られるジオイド面からの距離である。
- 正標高は、水準測量と重力測量を行うことで求められる。

重力の等ポテンシャル面



水準測量

$$\Delta h = a - b$$

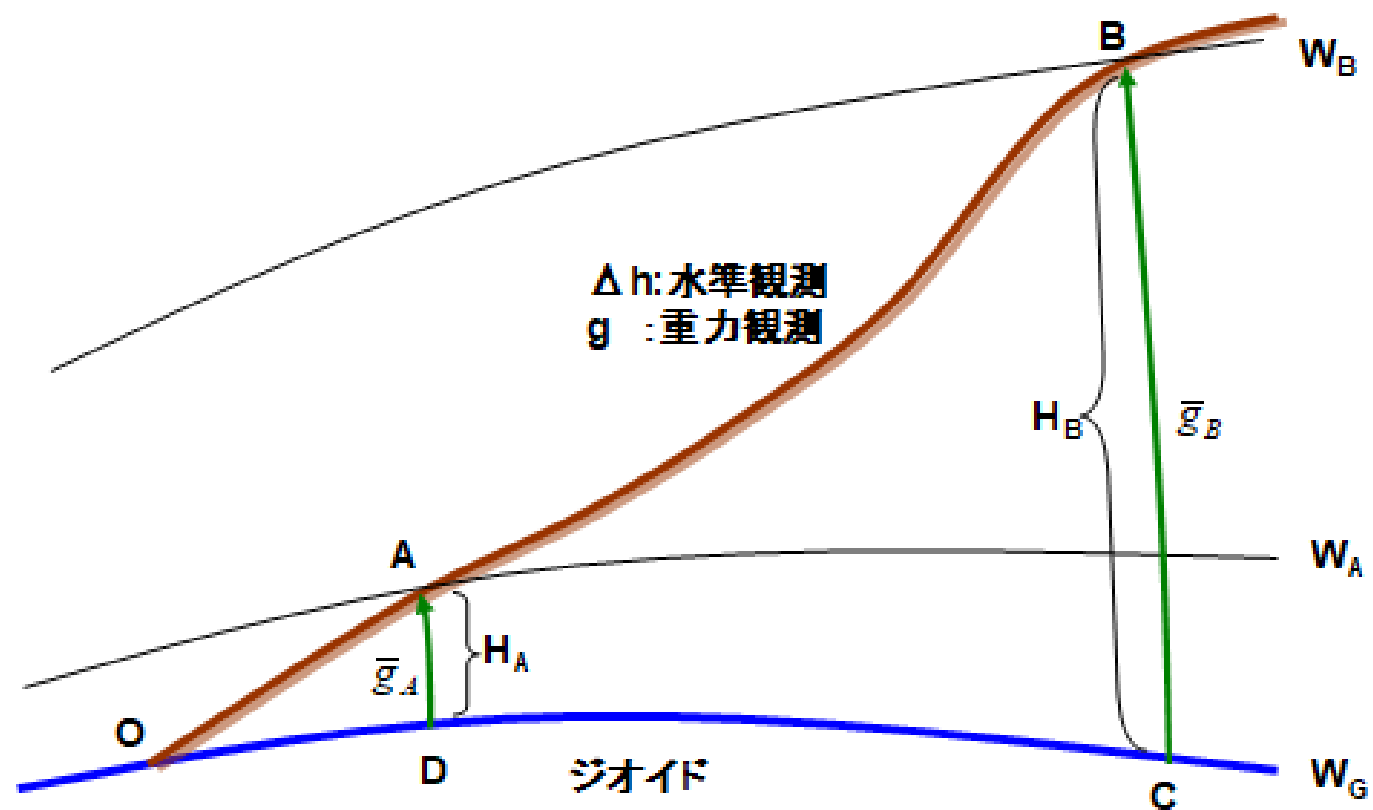


正標高の決定

A と B を通る鉛直線とジオイドとの交点をそれぞれ D, C とする。 A 点、 B 点の正標高 H_A 、 H_B は距離 AD, BC である。 正標高は地中での距離で直接観測できないので、地表における何らかの観測から求めなければならない。 ひとつは水準測量である。 例えば地表面に沿って $O \rightarrow A \rightarrow \dots \rightarrow ij \rightarrow \dots \rightarrow B$ と水準測量が行なわれる (O は高さの基準面であるジオイド上の点)。 ここで O, A, ij, B をそれぞれ通る重力の等ポテンシャル面 W_O, W_A, W_j, W_B を考えよう。 重力の等ポテンシャル面は一般的には平行ではないが、非常に近接した 2 点 ij 間では平行であると見なせる。 水準測量で測定されるのは図 4-12 で示されるこの近接した 2 点, ij を通る 2 つの重力の等ポテンシャル面の間の距離に相当する比高 Δh である。

従って O から A、 B へ水準測量を行えばこのような比高を足し合わせた $\sum_0^A \Delta h, \sum_0^B \Delta h$ が得られる。 問題はこの $\sum_0^A \Delta h, \sum_0^B \Delta h$ が、 A 点と B 点の正標高 H_A 、 H_B に必ずしも一致しないことである。 これは 2 つの等ポテンシャル面が平行ではなく、その間の距離が場所により異なっていることから生じている。 またこのため $\sum_0^A \Delta h, \sum_0^B \Delta h$ は、水準測量の観測経路を変えると違った値になる。

水準測量と重力測量による正標高決定



路線 AB 間で水準測量と同時に重力測量も行われたとしよう。

すると水準測量の比高 Δh と重力測量の重力値 g から $g\Delta h$ が計算できる。これは重力ポテンシャルの変化量 ΔW に相当するものである（「ジオイド」参照：重力ポテンシャルを微分すれば重力が得られる。 $\partial W / \partial h \equiv g$ ）。従って $g\Delta h$ を路線 AB 間で足し合わせれば、A と B の重力ポテンシャルの差 $W_B - W_A$ が得られる。

すなわち

$$\sum_A^B g\Delta h = W_B - W_A \quad (4-54)$$

である。ここで DA 間と CB 間で仮想的な水準測量と重力測量を考えよう（思考実験として地中での鉛直方向の水準測量を考える）すると式（4-54）と同様の式

$$\sum_D^A g\Delta h = W_A - W_G \quad (4-55)$$

$$\sum_C^B g\Delta h = W_B - W_G \quad (4-56)$$

が得られる。これら式の右辺から容易に

$$\text{式(4-54)} + \text{式(4-55)} = \text{式(4-56)} \quad (4-57)$$

となっていることが分かる。従って左辺について

$$\sum_A^B g\Delta h + \sum_D^A g\Delta h = \sum_C^B g\Delta h \quad (4-58)$$

が成り立つ。

この式の両辺を γ で割り、 g を $(g - \gamma) + \gamma$ で置き換える（ γ は正規重力値）と

$$\sum_A^B \left(1 + \frac{g - \gamma}{\gamma}\right) \Delta h + \sum_D^A \left(1 + \frac{g - \gamma}{\gamma}\right) \Delta h = \sum_C^B \left(1 + \frac{g - \gamma}{\gamma}\right) \Delta h \quad (4-59)$$

となる。整理すると

$$\sum_C^B \Delta h - \sum_D^A \Delta h = \sum_A^B \Delta h + \sum_A^B \frac{g - \gamma}{\gamma} \Delta h + \sum_D^A \frac{g - \gamma}{\gamma} \Delta h - \sum_C^B \frac{g - \gamma}{\gamma} \Delta h \quad (4-60)$$

正標高補正

標高差は

$$H_B - H_A = \sum_A^B \Delta h + \sum_A^B \frac{g - \gamma}{\gamma} \Delta h + \frac{\bar{g}_A - \gamma}{\gamma} H_A - \frac{\bar{g}_B - \gamma}{\gamma} H_B \quad (4-64)$$

と書ける。

この右辺第1項は水準測量で得られるAB間の比高である。右辺の残りの項を OC_{AB} と表すと結局

$$H_B - H_A = \sum_A^B \Delta h + OC_{AB} \quad (4-65)$$

ただし

$$OC_{AB} = \sum_A^B \frac{g - \gamma}{\gamma} \Delta h + \frac{\bar{g}_A - \gamma}{\gamma} H_A - \frac{\bar{g}_B - \gamma}{\gamma} H_B \quad (4-66)$$

が得られる。この式は、AB間の正標高差が水準測量によって得られる比高に重力を含む補正項 OC_{AB} を加えることによって求められることを示している。この補正項のことを正標高補正と呼ぶ。

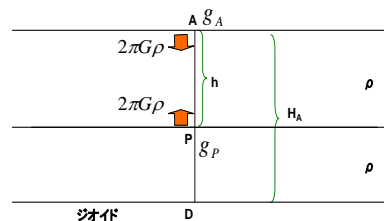
正標高補正の 計算 1

正標高補正を具体的に計算してみよう。 正標高補正式

$$OC_{AB} = \sum_A^B \frac{g - \gamma}{\gamma} \Delta h + \frac{\bar{g}_A - \gamma}{\gamma} H_A - \frac{\bar{g}_B - \gamma}{\gamma} H_B$$

の第1項は観測される水準比高 Δh と重力値 g から計算できる。 第2項と第3項には地中平均重力 \bar{g}_A, \bar{g}_B が含まれている。 これを地殻モデルを想定して計算してみよう。 簡単なモデルは、地殻を密度が一樣な板状地殻（これはブーゲー板と呼ばれている）で置き換えることである。

地表の点 A とジオイド面の間は密度 ρ で厚さ H_A のブーゲー板で覆われているとしよう。



密度 ρ の板状地殻の場合の地中での重力値

ブーゲー板による引力

今 A の真下 h にある地中の点 P を考え、P における重力値 g_P と A における重力値 g_A の差を考えてみる。 この差が生じるのは、次の2つのことに起因している。

1) AP 間のブーゲー板（厚さ h ）による引力が、A 点では重力値を増加させ、P 点では重力値を減少させる。

2) P 点と A 点で標高が違うために重力値に差が生じる。

AP 間のブーゲー板による引力は、次のように計算される。

まず密度 ρ 、半径 a 、厚さ h の円盤が、 z 上方の P 点に及ぼす下向きの引力 f を計算する。

円盤の微小質量 dm によるこの引力 df は

$$df = \frac{Gdm}{r^2} \cos \alpha = \frac{G\rho h z a d\alpha d\theta}{r^3}$$

である。

正標高補正の 計算 2

これを円盤全体に亘って積分すると、

$$f = \int df = G\rho h \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a \frac{z da}{(a^2 + z^2)^{3/2}} = 2\pi G\rho h \left[1 - \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right]$$

となる。

ここで円盤の半径を $a \rightarrow \infty$ とすると括弧内は 1 となり、ブーゲー板の引力 $f = 2\pi G\rho h$ が得られる。

ブーゲー板は A 点の重力値を $2\pi G\rho h$ だけプラスし、P 点の重力値を $2\pi G\rho h$ だけマイナスにする。また重力値の高度変化は正規重力値の高度変化 $\partial\gamma/\partial h$ で近似出来るから、P 点と A 点での重力値の違い $g_P - g_A$ は、

$$g_P - g_A = \frac{\partial\gamma}{\partial h} h - 2 \times 2\pi G\rho h$$

と書ける。 $\rho = 2.67 \text{g/cm}^3$ とすると、 $2\pi G\rho = 0.1119 \text{gal/km}$ であり、また $(\partial\gamma/\partial h) = 0.3086 \text{gal/km}$ であるから、これは

$$g_P - g_A = 0.0848 \cdot h$$

となる。従って AD 間の平均的な重力値 \bar{g}_A は、 g_P を AD 間で平均した

$$\bar{g}_A = \frac{1}{H_A} \int_0^{H_A} g_P dh = \frac{1}{H_A} \int_0^{H_A} (g_A + 0.0848h) dh = g_A + 0.0424 H_A$$

で与えられる。同様にして

$$\bar{g}_B = g_B + 0.0424 H_B$$

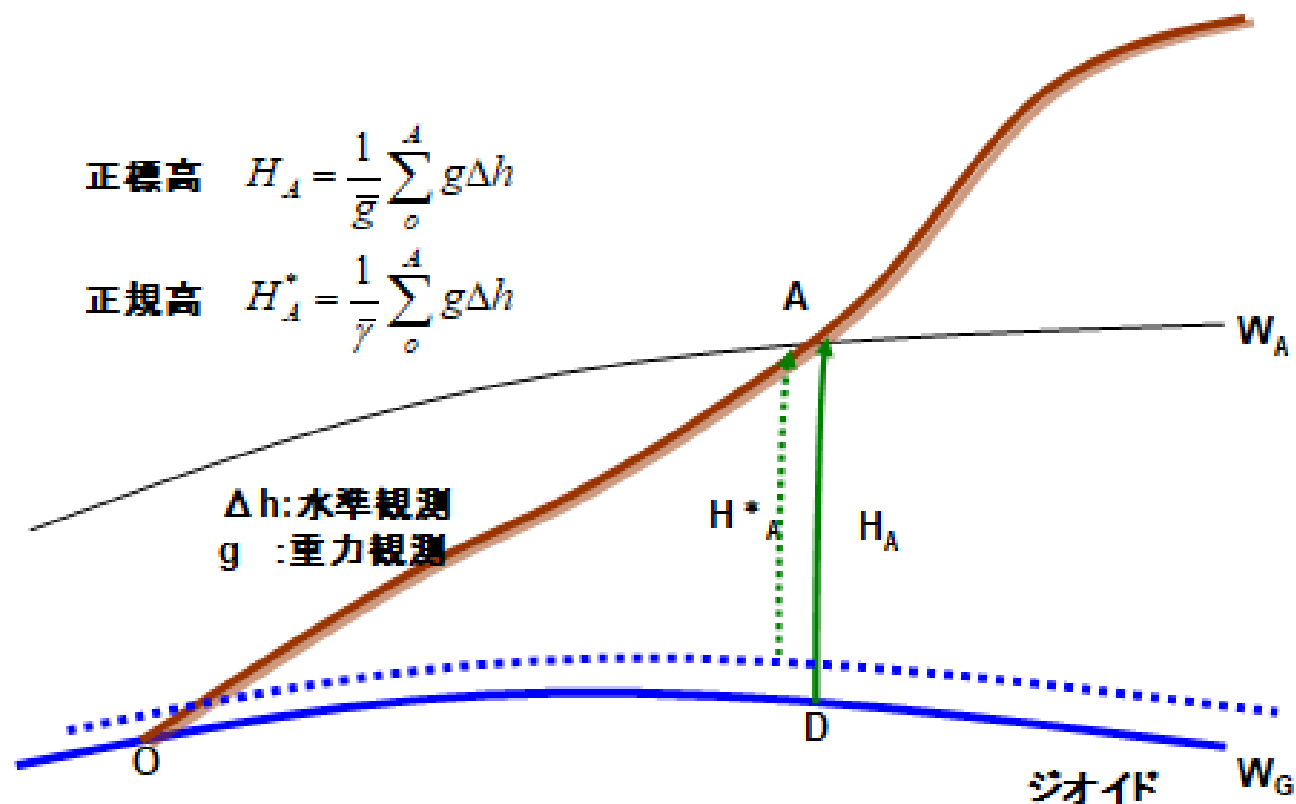
である。

これらを使えば正標高補正式が計算できる。なお導出式から明らかなように γ は任意の定数であるが、通常は緯度 45° における正規重力値が使われる (GRS80 楕円体の場合、それは $\gamma = 980619.92 \text{mgal}$ である。)

正標高と正規高

正標高 $H_A = \frac{1}{g} \sum_0^A g \Delta h$

正規高 $H_A^* = \frac{1}{\bar{\gamma}} \sum_0^A g \Delta h$



正標高はジオイドからの高さであるが、正規高はジオイドからの高さではなくなる。